

بورجي داود
أستاذ مادة الرياضيات

Bac

الهدى في

الرياضيات

دروس مفصلة، تمارين ومسائل محلولة عن:
الهندسة الفضائية

السنة الثالثة ثانوي
علوم تجريبية، تقني رياضي
رياضيات

Kimou

دار الهدى
عين مليلة - الجزائر

الجداء السلمي

I: الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تمرين: ABCD مستطيل حيث:

$$AD = 2\text{ cm} , AB = 1\text{ cm} \text{ و } E \text{ منتصف } [AD]$$

أحسب بثلاث طرق مختلفة: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$

تعريف: \vec{u}, \vec{v} شعاعان من المستوي.

الجداء السلمي للشعاعين \vec{u}, \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ المعروف كما يلي:

$$\blacksquare \text{ إذا كان: } \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{فإن: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\blacksquare \text{ إذا كان: } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ و } \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\text{فإن: } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

مثال: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = 2\text{ cm}$

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\text{ومنه: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{إذن: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

خاصية: يرمز إلى العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ بالرمز: \vec{u}^2 ويسمى المربع السلمي.

$$\text{بين أن: } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

إذا كان: \blacksquare المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

$$\blacksquare \vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} , \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

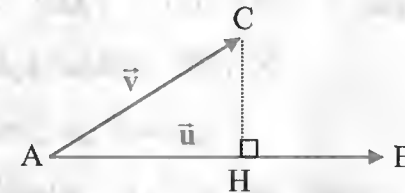
$$\text{فإن: } \vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع:

إذا كان: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ حيث: $A \neq B$.

■ H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



تطبيق: \vec{u} ، \vec{v} شعاعان من المستوي ، برهن صحة مايلي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right] \quad (1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right] \quad (2)$$

تطبيقات الجداء السلمي:

■ في كل ما يأتي المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$

(1) المسافة بين نقطتين:

إذا كانت: $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ فإن:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(2) بعد نقطة عن مستقيم:

إذا كانت: $A(x_0, y_0)$ نقطة كيفية من المستوي وكان (Δ) مستقيم

معرف بالمعادلة: $ax + by + c = 0$ مع $(a, b) \neq (0, 0)$

فإن: بعد النقطة A عن (Δ) يعطى بالعلاقة:

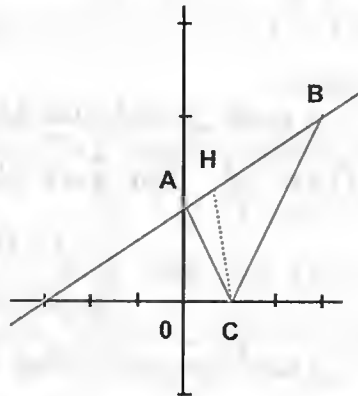
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: نعتبر في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط:

$$C(1, 0) , B(3, 2) , A(0, 1)$$

أكتب معادلة للمستقيم (AB) ، ثم أحسب مساحة المثلث ABC .

الحل: كتابة معادلة للمستقيم (AB) .



لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوي.

$M \in (AB)$ معناه: \overrightarrow{AM} ، \overrightarrow{AB} مرتبطان خطياً.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} , \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ومنه: } x = 3(y-1) \text{ أي: } x - 3y + 3 = 0$$

حساب مساحة المثلث ABC :

$$\text{نعلم أن: } S = \frac{AB \times CH}{2} \text{ حيث: } [CH] \text{ الارتفاع المتعلق بالضلع } [AB].$$

$$\text{لدينا: } AB = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

لدينا أيضاً: CH هو بعد النقطة C عن المستقيم (AB)

$$\text{ومنه: } CH = \frac{|1 - 3(0) + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\text{إذن: } S = \frac{\sqrt{10} \times \frac{4}{\sqrt{10}}}{2} = 2$$

الحل: لتكن $M(x, y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \text{ معناه: } M \in (C)$$

$$\text{لدينا: } \overline{BM} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}, \quad \overline{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

إذن: معادلة الدائرة (C) هي:

$$x^2 + y^2 - x - 3y + 2 = 0 \quad \text{أي: } x(x-1) + (y-1)(y-2) = 0$$

II: الجداء السلمي في الفضاء.

تعريف: \vec{u}, \vec{v} شعاعان من الفضاء و A, B, C ثلاث نقاط حيث:

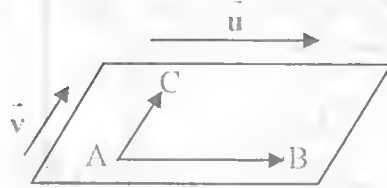
$$\vec{v} = \overline{AC}, \quad \vec{u} = \overline{AB}$$

يوجد على الأقل مستوي (P) يشمل النقاط A, B, C بحيث:

الجداء السلمي للشعاعين \vec{u}, \vec{v} هو الجداء السلمي للشعاعين $\overline{AB}, \overline{AC}$

في المستوي (P).

$$\text{أي: } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\overline{AB}, \overline{AC})$$



خواص: كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس

المستوي في الفضاء.

نتائج: \vec{u}, \vec{v} شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي و α عدد حقيقي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2] \quad (3)$$

(3) معادلة مستقيم علم شعاع ناظم له ونقطة منه:

إذا كان: $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم ناظم لمستقيم (Δ) .

فإن: معادلة المستقيم (Δ) تكتب من الشكل: $ax + by + c = 0$

مثال: أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1, 2)$ و $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x, y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه: } \overline{AM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{أي: } 2(x-1) + 3(y-2) = 0$$

$$\text{إذن: } 2x + 3y - 8 = 0$$

(4) معادلة دائرة علم قطرها:

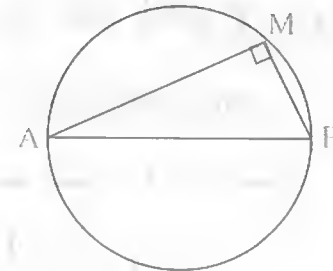
إذا كانت: A, B نقطتان ثابتتان من المستوي.

فإن: الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من المستوي

$$\text{حيث: } \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

مثال: أكتب معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[AB]$ حيث:

$$B(0, 1), \quad A(1, 2)$$



العبارة التحليلية للجدار السلمي:

إذا كان: $\vec{u}(a, b, c)$ ، $\vec{v}(a', b', c')$ شعاعان من فضاء مزود بمعلم

متعامد ومتجانس $(O; I, J, k)$

فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$

نتيجة: إذا كانت $B(x_2, y_2, z_2)$ ، $A(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان من فضاء

مزود بمعلم متعامد ومتجانس فإن:

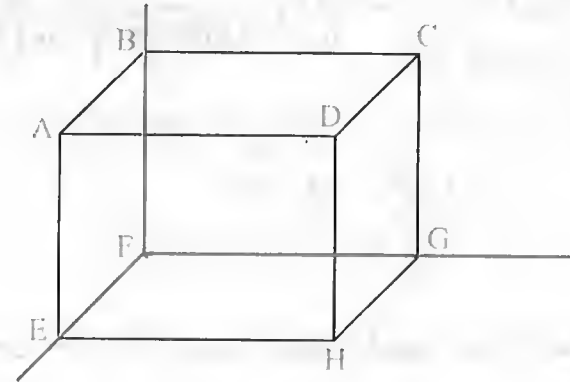
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال: ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1.

بين أن المستقيمين (AG) ، (FC) متعامدان.

الحل: نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(F; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$

فيكون: $F(0, 0, 0)$ ، $G(0, 1, 0)$ ، $C(0, 1, 1)$ ، $A(1, 0, 1)$



لدينا: $\overline{FC}(0, 1, 1)$ ، $\overline{AG}(-1, 1, -1)$

ومنه: $\overline{AG} \cdot \overline{FC} = (-1)(0) + (1)(1) + (-1)(1) = 0$

وهذا يعني أن الشعاعين \overline{AG} ، \overline{FC} متعامدان.

إذن المستقيمان (AG) ، (FC) متعامدان.

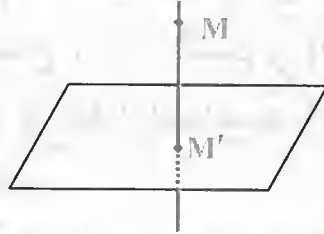
التعامد: الإسقاط العمودي على مستو:

تعريف: (P) مستو و M نقطة من الفضاء.

المستقيم العمودي على المستوي (P) ويشمل النقطة M يقطع المستوي

في نقطة وحيدة M' .

تسمى النقطة M' المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P) .



خاصية: إذا كانت:

▪ A, B نقطتان مختلفتان من مستو (P) .

▪ C نقطة من الفضاء لا تنتمي الى المستوي (P) .

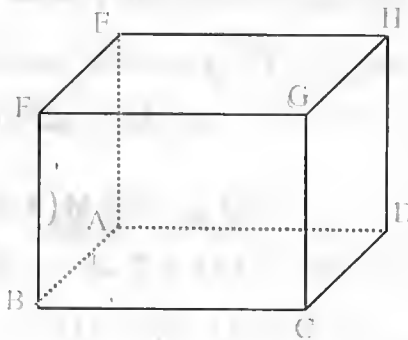
فإن: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

حيث: H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

مثال: ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 2 cm.

احسب الجداء السلمي: $\overline{AE} \cdot \overline{HC}$

الحل: المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (AEH) هي النقطة D .



ومنه: $\overline{AE} \cdot \overline{HC} = \overline{AE} \cdot \overline{HD}$

بما أن: $\overline{HD} = \overline{EA} = -\overline{AE}$ فإن: $\overline{AE} \cdot \overline{HC} = -\overline{AE} \cdot \overline{AE}$

أي: $\overline{AE} \cdot \overline{HC} = -\|\overline{AE}\|^2 = -4$

في كل ما يأتي نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس.

(1) المعادلة الديكارتية لمستوى:

تعريف: كل شعاع غير معدوم \vec{u} عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا

من مستوى (P) هو شعاع عمودي على المستوى (P).

▪ يسمى الشعاع \vec{u} ناظم للمستوى (P).

نتيجة: إذا كان: \vec{u} شعاعا ناظما لمستوى (P) فإنه: عمودي على أي شعاع

من هذا المستوى.

تعيين مستوى: \vec{u} شعاع غير معدوم و A نقطة ثابتة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ هي مجموعة

نقط المستوى الذي يشمل النقطة A و \vec{u} شعاع ناظم له.

خاصية (1): لكل مستوى شعاع ناظم له (a, b, c) معادلة ديكارتية من

الشكل: $ax + by + cz + d = 0$ حيث d عدد حقيقي.

خاصية (2): مجموعة النقط M التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق المعادلة:

$ax + by + cz + d = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة

هي: مجموعة نقط مستوى شعاع ناظم له (a, b, c)

مثال: أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة $A(1, 2, 3)$

و $\vec{u}(2, -4, 3)$ شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من المستوى (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

أي: $2(x-1) - 4(y-2) + 3(z-3) = 0$

إذن: $2x - 4y + 3z - 3 = 0$

حالات خاصة: (O; I, J, k) معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

(1) معادلة ديكارتية للمستوى (O; I, J) هي: $z = 0$

(2) معادلة ديكارتية للمستوى (O; I, k) هي: $y = 0$

(3) معادلة ديكارتية للمستوى (O; J, K) هي: $x = 0$

(2) بعد نقطة عن مستوى:

إذا كان: A نقطة إحداثياتها (x_0, y_0, z_0) .

▪ (P) مستوى معرف بالمعادلة: $ax + by + cz + d = 0$

فإن: بعد النقطة A عن المستوى (P) هو العدد الحقيقي الموجب:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال: نعتبر المستوى (P) المعرف بالمعادلة: $x + y - z + 1 = 0$.

بعد النقطة $A(2, 3, 0)$ عن المستوى (P) هو:

$$\frac{|2 + 3 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

(3) معادلة سطح كرة:

تعريف: سطح الكرة التي مركزها A وطول نصف قطرها r هي:

مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $AM = r$.

مبرهنة: معادلة سطح الكرة التي مركزها $A(a, b, c)$ وطول نصف

قطرها r هي: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

نتيجة: سطح الكرة التي قطرها [AB] هي مجموعة النقط M من الفضاء

حيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

مثال: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $A(1, 2, -1)$ وطول

نصف قطرها 3.

الحل: لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $AM = 3$

أي: $AM^2 = 9$ معناه: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

لدراسة هذه المجموعة نحسب: $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

ونميز الحالات التالية:

▪ $\Delta < 0$: المجموعة خالية.

▪ $\Delta = 0$: المجموعة تشمل نقطة واحدة إحداثياتها $\left(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2}, \frac{c}{-2}\right)$

▪ $\Delta > 0$: المجموعة سطح كرة إحداثيات مركزها $\left(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2}, \frac{c}{-2}\right)$

وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

مثال: حدد المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$$

الحل: لدينا: $a = -2$ ، $b = 0$ ، $c = 0$ ، $d = -3$

$$\Delta = (-2)^2 + (0)^2 + (0)^2 - 4(-3) = 16 > 0$$

بما أن: $\Delta > 0$ فإن: المجموعة (S) سطح كرة مركزها $A(1, 0, 0)$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

المرجح

المرجح في المستوي (مراجعة).

تمرين: A, B, C ثلاث نقاط من مستو.

(1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة: $\{(A, 1), (B, 3), (C, 1)\}$

(2) نزود المستوي بالمعلم (O; I, J) ونفرض:

C(3, 2), B(0, 1), A(2, 0) حدد احداثيي النقطة G ثم علمها.

(3) عين المجموعة (C) للنقط M من المستوي بحيث:

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$$

المرجح في الفضاء:

مبرهنة وتعريف: $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

جملة تشمل n نقطة من الفضاء حيث:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$$

▪ توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق:

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

▪ تسمى النقطة G مرجح الجملة:

$$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$$

خاصية: عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة α_n تسمى النقطة G

مركز ثقل الجملة.

مبرهنة: من أجل كل نقطة M من الفضاء

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

حيث: G مرجح الجملة:

$$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$$

مثال: عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$$

الحل: لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} \quad \text{أي:} \quad \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{لدينا: } \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1 \quad \text{ومنه: } MG = 1$$

إذن: (E) هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1.

التمييز بالمرجح: A, B, C ثلاث نقاط من الفضاء ليست في استقامة.

(1) المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح للنقطتين A, B .

(2) القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجح للنقطتين A, B مرفقة بمعاملين من نفس الإشارة.

(3) المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح للنقاط A, B, C .

برهان الخاصية (1):

■ نفرض M نقطة من المستقيم (AB)

ونبرهن M مرجح للنقطتين A, B .

بما أن: M نقطة من المستقيم (AB)

فإن: $\overline{AM}, \overline{AB}$ مرتبطان خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي α بحيث: $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$

أي: $\overline{AM} = \alpha (\overline{AM} + \overline{MB})$ إذن: $(1-\alpha)\overline{AM} + \alpha \overline{BM} = \overline{0}$

لدينا: $(1-\alpha) + \alpha = 1 \neq 0$

ومنه: M مرجح $\{(A, 1-\alpha), (B, \alpha)\}$

■ نفرض M مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

ونبرهن M نقطة من المستقيم (AB) .

بما أن: M مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

فإن: $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = \overline{0}$

معناه: $\overline{AM} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overline{AB}$

إذن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB) .

مجموعات النقط M من الفضاء حيث:

1: $\overline{AM} \cdot \overline{u} = \alpha$ حيث: u شعاع غير معدوم

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overline{AM} \cdot \overline{u} = \alpha$ هي مجموعة نقط مستو شعاع ناظم له \overline{u} .

2: $\alpha \overline{AM}^2 + \beta \overline{BM}^2 = \lambda$ حيث: α, β, λ أعداد حقيقية.

لتعيين مجموعة النقط M نميز الحالتين التاليتين:

(أ) إذا كان: $\alpha + \beta = 0$.

المعادلة: $\alpha \overline{AM}^2 + \beta \overline{BM}^2 = \lambda$ تكافئ:

$$\alpha (\overline{AO} + \overline{OM})^2 + \beta (\overline{BO} + \overline{OM})^2 = \lambda$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha \overline{AO}^2 + \beta \overline{BO}^2 + 2 \overline{OM} \cdot (\alpha \overline{AO} + \beta \overline{BO}) = \lambda$$

نضع: $\alpha \overline{AO} + \beta \overline{BO} = \overline{u}$ ، $0.5 (\lambda - \alpha \overline{AO}^2 - \beta \overline{BO}^2) = k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $\overline{OM} \cdot \overline{u} = k$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما مستو وإما الفضاء وإما المجموعة الخالية.

(ب) إذا كان: $\alpha + \beta \neq 0$.

المعادلة: $\alpha \overline{AM}^2 + \beta \overline{BM}^2 = \lambda$ تكافئ:

$$\alpha (\overline{AG} + \overline{GM})^2 + \beta (\overline{BG} + \overline{GM})^2 = \lambda$$

حيث: G مرجح الجملة: $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$.

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha \overline{AG}^2 + \beta \overline{BG}^2 + (\alpha + \beta) \overline{GM}^2 = \lambda$$

نضع: $\frac{\lambda - \alpha \overline{AG}^2 - \beta \overline{BG}^2}{\alpha + \beta} = k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $\overline{GM}^2 = k$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما سطح كرة وإما المجموعة $\{G\}$ وإما المجموعة الخالية.

مثال: A, B نقطتان من الفضاء حيث: $AB=1$.

عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$2AM^2 - BM^2 = 3$$

الحل: بما أن: $2 + (-1) = 1 \neq 0$

فإنه: توجد نقطة G مرجح للجملة $\{(A, 2), (B, -1)\}$

$$\text{أي: } 2\overline{GA} - \overline{GB} = \vec{0}$$

$$\text{لدينا: } 2AM^2 - BM^2 = 3$$

$$\text{ومنه: } 2(\overline{AG} + \overline{GM})^2 - (\overline{BG} + \overline{GM})^2 = 3$$

بعد النشر والتبسيط نجد: $GM^2 = 3 - 2AG^2 + BG^2$

■ لنحسب AG و BG :

$$\text{لدينا: } 2\overline{GA} - \overline{GB} = \vec{0}$$

ومنه: $(\overline{AG} = \overline{BA} \text{ و } \overline{BG} = 2\overline{BA})$

إذن: $\overline{AG} = \overline{AB} = 1$ ، $\overline{BG} = 2\overline{AB} = 2$

$$\text{المعادلة: } GM^2 = 3 - 2AG^2 + BG^2$$

تكافئ: $GM^2 = 5$ أي: $GM = \sqrt{5}$.

إذن: مجموعة النقط (E) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

المستقيمات والمستويات في الفضاء

التمثيل الوسيطى لمستقيم:

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; I, J, k)$ و (Δ) مستقيم من الفضاء

يشمل النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ و $\vec{u}(a, b, c)$ شعاع توجيه له.

تتتمي نقطة M من الفضاء إحداثياتها (x, y, z) إلى المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان \vec{AM} ، \vec{u} مرتبطين خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overline{AM} = t\vec{u}$

وهذا يعني أن: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

تسمى الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

مثال: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم $(O; I, J, k)$ النقاط:

$$C(1, 1, 1) , B(2, 0, 1) , A(1, 2, 3)$$

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

الحل: لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (AB)$ تكافئ: $\overline{AM} = t\overline{AB}$ حيث: t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 2 = -2t \\ z - 3 = -2t \end{cases}$$

التمثيل الوسيطى لمستو: A, B, C ليست في استقامة

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\overline{AM} = t\overline{AB} + \lambda\overline{AC} \text{ مع: } t, \lambda \text{ عدنان حقيقيان.}$$

مثال: التمثيل الوسيطى للمستوي (p) الذي يشمل النقاط:

$$C(3, 1, 0) , B(2, 1, 1) , A(1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2\lambda \\ y = t + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x - 1 = t + 2\lambda \\ y = t + \lambda \\ z - 1 = -\lambda \end{cases}$$

الأوضاع النسبية

$(\Delta), (\Delta')$ مستقيمان من الفضاء موجهان بالشعاعين \bar{u}, \bar{v} على الترتيب.

$(P), (P')$ مستويان و \bar{m}, \bar{n} ناظميان لهما على الترتيب.

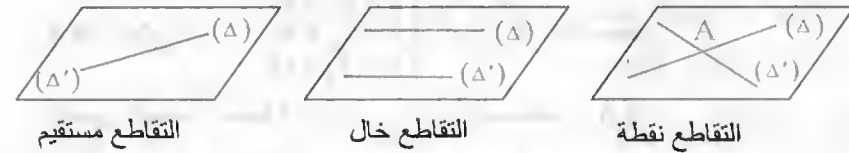
1: لمستقيمين: لدراسة الوضع النسبي للمستقيمين $(\Delta), (\Delta')$ نميز ماييلي:

أ) \bar{v}, \bar{u} مرتبطان خطيا:

$(\Delta), (\Delta')$ متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) \bar{v}, \bar{u} غير مرتبطين خطيا:

$(\Delta), (\Delta')$ متقاطعان في نقطة أو ليسا من نفس المستوي.



مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيمين $(\Delta_1), (\Delta_2)$ حيث:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 3 + t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}, \quad (\Delta_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

الحل: شعاعا توجيه $(\Delta_1), (\Delta_2)$ هما على الترتيب $\bar{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

بما أن: $(-1)(-1) \neq (1)(2)$

فإن: \bar{v}, \bar{u} غير مرتبطين خطيا.

وبالتالي: $(\Delta_1), (\Delta_2)$ متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - t' \\ -t = 3 + t' \end{cases} \text{ فنجد: } \begin{cases} t = 4 \\ t' = -7 \end{cases}$$

من أجل $t = 4$ نجد:

نقطة $A(9, -4, 11)$ من (Δ_1) .

ومن أجل $t' = -7$ نجد:

نقطة $B(9, -4, -13)$ من (Δ_2) .

بما أن: $A \neq B$ فإن: $(\Delta_1), (\Delta_2)$ ليسا من نفس المستوي.

2: لمستقيمين ومستوي: لدراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P)

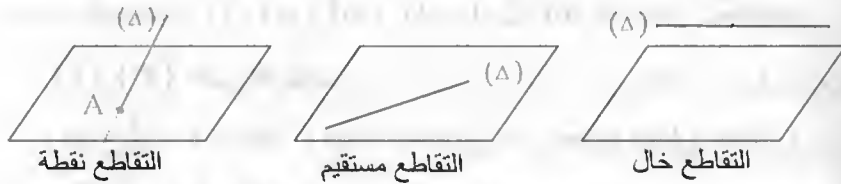
نميز الحالتين التاليتين:

أ) \bar{n}, \bar{u} متعامدان:

(Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوي في (P) .

ب) \bar{n}, \bar{u} غير متعامدين:

(Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.



مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) حيث:

$$(P): 2x + y - z - 1 = 0; \quad (\Delta): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

الحل: لدينا: $\bar{u}(-2, 1, -3)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\bar{n}(2, 1, -1)$

شعاع ناظم للمستوي (P) .

لدينا: $\bar{u} \cdot \bar{n} = (2)(-2) + (1)(1) + (-1)(-3) = 0$

ومنه: \bar{n}, \bar{u} متعامدان وعليه: (Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوي في (P)

بما أن: النقطة $A(1, 0, 1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) والمستوي (P)

فإن: المستقيم (Δ) محتوي في المستوي (P) .

3: لمستويين: لدراسة الوضع النسبي للمستويين $(P), (P')$ نميز ماييلي:

أ) \bar{m}, \bar{n} مرتبطان خطيا:

المستويان $(P), (P')$ متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) \bar{m}, \bar{n} غير مرتبطين خطيا:

المستويان $(P), (P')$ متقاطعان وفق مستقيم.

الحل:

تكافئ:
$$\begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$
 الجملة:

$$\begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 & (1) \\ -2x - y - z = 0 & (2) \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و (2) طرفا إلى طرف فنجد:

$$2x + 10 = 0 \text{ ومنه: } x = -5$$

نجمع أيضا طرفي المعادلتين (2) و (3) طرفا إلى طرف فنجد:

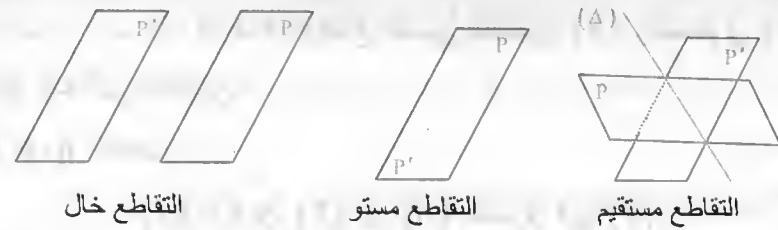
$$z - 1 = 0 \text{ ومنه: } z = 1$$

نعوض عن قيمة كل من z, x في المعادلة (3) فنجد: $y = 9$.

إذن: الجملة تقبل حلا وحدا هو: $(-5, 9, 1)$.

بما أن: الجملة تقبل حلا وحيدا فإن:

المستويات $(P_1), (P_2), (P_3)$ تتقاطع في نقطة A إحداثياتها $(-5, 9, 1)$.



مثال: أدرس الوضع النسبي للمستويين $(P), (P')$ المعرفين بالمعادلتين:

$$(P): 2x - y + 3z + 1 = 0, \quad (P'): -2x + y - 3z + 2 = 0$$

الحل: الشعاعان $\vec{n}(2, -1, 3)$ ، $\vec{m}(-2, 1, -3)$ ناظميان للمستويين

$(P), (P')$ على الترتيب.

واضح أن: $\vec{m} = -\vec{n}$ ومنه: الشعاعان \vec{n}, \vec{m} مرتبطان خطيا.

وبالتالي: $(P), (P')$ منطبقان أو متوازيان ومختلفان.

بما أن: النقطة $A(1, 0, -1)$ تنتمي إلى (P) ولا تنتمي إلى (P')

فإن: المستويين $(P), (P')$ متوازيان ومختلفان.

خاصية: يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين.

4: لثلاث مستويات: لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات ندرس الوضع النسبي لمستويين من هذه المستويات ونميز الحالات التالية.

أ) تقاطع المستويين خال: تقاطع المستويات الثلاثة خال.

ب) تقاطع المستويين مستقيم: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستو

ج) تقاطع المستويين مستو: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستويين.

$$\begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

استنتج الوضع النسبي للمستويات $(P_1), (P_2), (P_3)$ المعرفة بالمعادلات:

$$2x + y + 2z - 1 = 0, \quad 2x + y + z = 0, \quad 4x + y + z + 10 = 0$$

تمارين ومسائل محلولة

الجداء السلمي:

1: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

الشعاعين $\vec{u}(0, 3, 4)$ ، $\vec{v}(2, 2, 1)$

أحسب جيب تمام الزاوية (\vec{u}, \vec{v}) .

2: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

الأشعة: $\vec{w}(1, a, b)$ ، $\vec{v}(0, 1, 1)$ ، $\vec{u}(1, 1, 0)$

(1) حدد قياسا للزاوية (\vec{u}, \vec{v}) .

(2) عين قيمة كل من العددين a, b بحيث يكون الشعاع \vec{w} عموديا على

كل من الشعاعين \vec{u}, \vec{v} ثم احسب طول الشعاع \vec{w} .

3: نعتبر في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط:

$A(3, 0, 3)$ ، $B(1, 4, -3)$ ، $C(1, 0, 3)$

$D(1, 0, -3)$

(1) أحسب $\overline{BD} \cdot \overline{DC}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته.

(2) أثبت أن المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD) ثم أحسب

حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4: $(O; I, J, k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

عين الأشعة $\vec{w}(a, b, c)$ العمودية على كل من الشعاعين

$\vec{u}(1, 2, 3)$ ، $\vec{v}(2, 3, 1)$.

5: $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a .

أحسب: $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ و $\overline{AC} \cdot \overline{BA}$ ثم استنتج قيمة $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ وأعط تفسيراً

للنتيجة.

6: $ABCDE$ هرم قاعدته مربع ورأسه E ، أضلاعه متقايسة حيث طول

كل منها 4 cm .

(1) أحسب $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ و $\overline{AE} \cdot \overline{AD}$.

(2) بين أن المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطتين:

$A(1, 2, 0)$ ، $B(3, 0, 1)$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.

8: $(O; I, J, k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي تشمل المبدأ O والنقاط:

$A(1, 0, 0)$ ، $B(3, 0, 2)$ ، $C(1, 2, 2)$.

9: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطة $A(1, -1, 1)$

والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x + y + z - 4 = 0$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P) .

10: $(O; I, J, k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء و (S) سطح كرة

معادلته: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ و (Δ) مستقيم معادلته الوسيطة هي:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي.

عين إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم (Δ) و سطح الكرة (S) .

11: الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

(S) سطح كرة معرفة بالمعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ و (P)

المستوي المعرف بالمعادلة: $x + y + z - 1 = 0$

بين أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب

تعيين مركزها A وطول نصف قطرها r .

12: في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس يعطى المستوى (P) المعرف

بالمعادلة: $x - 2y + 2z - 1 = 0$ والنقطة A التي إحداثياتها $(2, -1, 3)$.

(1) أحسب نصف قطر سطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس (P) .

(2) حدد إحداثيات نقطة التماس B لسطح الكرة (S) والمستوى (P) .

13: الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$.

حدد في كل حالة من الحالات التالية المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 5 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0$$

14: A, B نقطتان من الفضاء حيث: $AB = 2$ و O منتصف القطعة $[AB]$.

عين المجموعة S للنقط M من الفضاء حيث: $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 4$.

15: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقطة $A(3, 2, 5)$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $4x - 3z + 3 = 0$.

بين أنه توجد كرتان تسمان المستوى (P) في النقطة A طول نصف قطر كل منهما 5 ، حدد مركزيهما.

المعادلة الديكارتية لمستوى:

في كل ما يأتي نزود الفضاء بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$.

16: اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة $A(1, 0, 1)$ وشعاع ناظم له $\vec{u}(2, 1, 3)$.

17: تعطى النقطتان $A(-3, 2, 1)$ ، $B(9, 4, 3)$.

اكتب معادلة المستوى (P) العمودي على القطعة $[AB]$ في منتصفها.

18: تعطى النقط $A(1, 0, 2)$ ، $B(1, 1, 1)$ ، $C(-1, 2, 0)$.

عين بطريقتين مختلفتين معادلة المستوى (P) الذي يشمل A, B, C .

19: اكتب معادلة للمستوى (P) الذي يشمل كل من النقطة $A(2, -3, 1)$

$$\text{والمستقيم } (\Delta) \text{ المعرف بالمعادلتين: } \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

20: اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة $A(-1, 2, 3)$

ويوازي المستوى المعرف بالمعادلة: $-x + 2y + z - 3 = 0$.

21: نعتبر النقطة $A(-6, 2, -1)$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة:

$$5x - y + z + 6 = 0$$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على (P) هو النقطة $B(-1, 1, 0)$.

22: اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة $A(1, 0, -2)$

والعمودي على كل من المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين:

$$-x + y + z + 3 = 0 \quad , \quad 2x + y - z - 2 = 0$$

23: تعطى النقط: $A(2, -3, 4)$ ، $B(1, 0, 2)$ ، $C(2, -1, 2)$ ، $D(1, -1, 3)$.

بين أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى مستو واحد.

24: (Δ) ، (Δ') مستقيمان من الفضاء حيث:

$$(\Delta'): \begin{cases} x + 2z - 4 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad , \quad (\Delta): \begin{cases} 3x - 2y - 17 = 0 \\ 4x - 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

اكتب معادلة للمستوى (P) الذي يشمل المستقيم (Δ') ويوازي المستقيم (Δ) .

25: حدد المجموعة (P) للنقط $M(x, y, z)$ التي إحداثياتها تحقق

$$\text{المعادلة: } |2x - y + z + 2| = |x - y + 2z|$$

26: m وسيط حقيقي و (P_m) مجموعة النقط M من الفضاء التي

إحداثياتها (x, y, z) تحقق المعادلة:

$$x + (2m + 1)y + (3m + 2)z - 1 = 0$$

1: بين أن المجموعة (P_m) مستو من الفضاء .

2: أثبت أن (P_m) تشمل مستقيما ثابتا يطلب تعيينه.

3: عين في كل حالة من الحالتين التاليتين المستوى الذي:

أ) يشمل النقطة $A(3, 1, 1)$.

ب) يعامد المستوى (P') المعرف بالمعادلة: $2x - y + z + 5 = 0$.

بعد نقطة عن مستو:

في كل ما يأتي (O; I, J, k) معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

27: نعتبر في الفضاء المستوي (P) المعروف بالمعادلة:

$$2x - 3y + z + 9 = 0$$

أحسب بعد النقطة A(-1, 3, 2) عن المستوي (P) ثم فسر النتيجة.

28: (1) عين إحداثيات المركز A وطول نصف القطر R لسطح الكرة (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 7 = 0$$

(2) أحسب بعد النقطة A عن المستوي (P) الذي معادلته:

$$x + y - 2z + 3 = 0$$

ثم استنتج الوضع النسبي لسطح الكرة (S) والمستوي (P).

29: ليكن المستويان (P₁)، (P₂) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$$-x + 2y + z + 5 = 0 \quad , \quad x - y + 3z + 1 = 0$$

(1) بين أن المستويين (P₁)، (P₂) متعامدان.

(2) أحسب بعد النقطة A(1, 2, -1) عن كل من المستويين (P₁)، (P₂)

ثم استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) تقاطع (P₁)، (P₂).

المرجح في الفضاء

30: ABCD رباعي وجوه حيث: G مركز ثقل المثلث ABC و E مرجح

$$\{(D, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$$

بين أن النقطة E هي منتصف [DG].

31: ABCD ، EFGH رباعيا وجوه لهما نفس مركز الثقل K.

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} = \vec{0}$$

32: A, B, C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

E, F, G مراجح الجمل التالية على الترتيب:

$$\{(A, -1), (B, 2)\} \quad , \quad \{(C, 1), (B, 2)\}$$

$$\{(A, -1), (B, 2), (C, 1)\}$$

برهن أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

33: A, B نقطتان من الفضاء و G مرجح الجملة: {(A, 2), (B, -3)}.

عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث: $\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = 4$.

34: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم (O; I, J, k) النقاط:

$$C(1, 0, 3) \quad , \quad B(-1, 3, 1) \quad , \quad A(4, 1, -2)$$

(1) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

(2) حدد إحداثيات النقطة D منتصف [AB] ثم تحقق أن: $3\overrightarrow{CG} - 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

ماذا تمثل النقطة C بالنسبة إلى النقطتين D, G ؟

35: (O; I, J, k) معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$$C(0, 0, c) \quad , \quad B(0, b, 0) \quad , \quad A(a, 0, 0)$$

حيث: a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة و $ab + bc + ac = 0$

(1) عين بدلالة a, b, c الإحداثيات (x, y, z) للنقطة G مرجح

$$\{(A, b+c), (B, a+c), (C, a+b)\}$$

(2) أحسب المجموع: $x + y + z$ ثم استنتج مجموعة النقط G.

36: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O; I, J, k)

$$C(7, 3, 0) \quad , \quad B(0, 4, 0) \quad , \quad A(3, 0, 0)$$

(1) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة:

$$\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$$

(2) حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\| = OM$$

43: عين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

$$A(1, -1, 2) \text{ وشعاع توجيه له } \vec{u}(3, 2, 1).$$

44: عين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) المعروف بجملته المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

45: تعطى النقطتان: $A(1, 3, 2)$ ، $B(3, 2, 5)$.

أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم القطعة $[AB]$.

46: عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المستوي (OIK) والمستقيم (Δ)

المعرف بجملته المعادلات الوسيطة التالية:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \text{ مع } t \text{ عدد حقيقي.}$$

47: t وسيط حقيقي حيث: $-1 \leq t \leq 3$.

عين مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق:

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3t^2 \\ z = 2 + 2t^2 \end{cases}$$

بعد نقطة عن مستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; I, J, k)$.

48: يعطى المستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ مع } t \text{ عدد حقيقي.}$$

(1) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(1, 0, 1)$ على

المستقيم (Δ) .

(2) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

37: A, B نقطتان متميزتان من الفضاء.

حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء حيث يكون الشعاعان

$$\overline{MA} - 2\overline{MB} \text{ ، } \overline{AB} \text{ متعامدين.}$$

38: ABC مثلث حيث: $AB = 16 \text{ cm}$ ، $AC = 20 \text{ cm}$ ، $BC = 28 \text{ cm}$

$$\text{نضع: } \vec{V}_1 = 7\overline{MA} + 5\overline{MB} + 4\overline{MC} \text{ ، } \vec{V}_2 = 2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}$$

حيث: M نقطة كيفية من الفضاء.

(1) أعط عبارة بسيطة للشعاع \vec{V}_1 .

(2) بين أن الشعاع \vec{V}_2 مستقل عن النقطة M ثم احسب $\|\vec{V}_2\|$.

(3) عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث يكون: $\|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_2\|$.

39: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = AC = BC = 2 \text{ cm}$.

1: (S_1) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 8$$

(أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1) .

(ب) حدد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

2: عين المجموعة (S_2) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 8$$

المعادلات الوسيطة لمستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O; I, J, k)$.

40: بين أن الشعاعين $\vec{u}(1, 0, 2)$ ، $\vec{v}(2, 0, 4)$ مرتبطان خطياً.

41: بين أن الأشعة $\vec{u}(-2, 1, 3)$ ، $\vec{v}(2, -1, 1)$ ، $\vec{w}(6, -3, -1)$

مرتبطة خطياً.

42: (1) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1, 0, 2)$

وشعاع توجيه له $\vec{u}(2, 1, -1)$.

(2) بين أن النقطة $B(5, 2, 1)$ لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

49: نعتبر في الفضاء النقطة $A(0,1,1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \text{ مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) و f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(t) = AM^2$$

(1) شكل جدول تغيرات f ثم عين أصغر قيمة تبلغها الدالة f .

(2) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

50: لتكن النقطتان $A(1,2,1)$ ، $B(2,-2,-1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1-t \end{cases} \text{ مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

(1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) ثم

احسب بعد النقطة B عن المستوي (P) .

(2) تحقق أن B تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم استنتج بعد A عن (Δ) .

الأوضاع النسبية: في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O; I, J, k)$.

51: نعتبر المستقيمين (Δ) ، (Δ') :

$$(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}, \quad (\Delta'): \begin{cases} x = 1+t' \\ y = 3-t' \\ z = 2+t' \end{cases}$$

حيث: t, t' عدنان حقيقيان.

بين أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') متقاطعان في نقطة يطلب تحديدها.

52: بين أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي حيث:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}, \quad (\Delta'): \begin{cases} x = 3+t' \\ y = 1+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$$

حيث: t, t' عدنان حقيقيان.

53: أثبت أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') متوازيان ومختلفان حيث:

$$(\Delta'): \begin{cases} 2y + z - 5 = 0 \\ 4x - 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases}, \quad (\Delta): \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

54: عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (OIK) حيث:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

55: بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تحديدها.

$$(P): -2x + y - z + 4 = 0; \quad (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 4-3t \\ z = 2+t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

56: (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(0,2,1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(1,0,2)$.

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) المعروف بالمعادلة:

$$2x + y - z + 3 = 0$$

57: نعتبر المستويين (P) ، (P') المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$$x - 3y + 2z - 4 = 0, \quad 2x + y - z + 1 = 0$$

بين أن (P) ، (P') متقاطعان ثم عين شعاع توجيه مستقيم تقاطعهما.

58: m وسيط حقيقي و (P_1) ، (P_2) مستويان معرفان بالمعادلتين التاليتين

على الترتيب:

$$(m+1)x + (m-2)y + (3m-2)z + 1 = 0, \quad 2x - y + z + 3 = 0$$

عين في كل حالة من الحالتين التاليتين قيمة الوسيط m حيث يكون:

(أ) المستويان (P_1) ، (P_2) متوازيين.

(ب) المستويان (P_1) ، (P_2) متعامدين.

59: حل الجملة التالية ثم أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 5 \\ -4x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$$

60: نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) حيث:

$$(P_1): x+3y+z-1=0 \quad , \quad (P_2): -3x+5y-z-2=0$$

$$(P_3): -x+25y+3z-9=0$$

(1) بين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء شعاع توجيه له.

(2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3) .

(3) استنتج مجموعة حلول الجملة التالية وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ -3x+5y-z=2 \\ -x+25y+3z=9 \end{cases}$$

61: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J, k)$

النقطة $A(1, -1, 2)$ والشعاع $\vec{u}(-2, 1, 3)$

1: أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل A وشعاع توجيه له \vec{u} .

2: ليكن (D) المستقيم المعرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

أ) عين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D) .

ب) بين أن المستقيمين (Δ) ، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O ويعامد (Δ) .

ب) بين أن المستقيم (D) محتوئ في المستوي (P) .

62: بكالوريا المغرب دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقطتين: $A(0, -1, 1)$ ، $B(1, -1, 0)$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

1: بين أن مركز سطح الكرة (S) هو $w(1, 0, 2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S) .

2: بين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

3: أثبت أن المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A .

63: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

المجموعة (S) للنقط M التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

1: أثبت أن المجموعة (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها w وطول

نصف قطرها R .

2: m وسيط حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة: $3x - 4z + m = 0$

أ) بين أن المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب

تحديد مركزها A وطول نصف قطرها r .

ب) أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S) .

تمارين ومسائل متنوعة:

64: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(1, 0, 2)$ ، $B(1, 1, 4)$ ، $C(-1, 1, 1)$.

1: أ) أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3, 4, -2)$ ناظم للمستوي (ABC) .

ج) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

2: ليكن المستويان (P_1) ، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على

$$2x + y + 2z + 1 = 0 \quad , \quad x - 2y + 6z = 0$$

أ) بين أن المستويين متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

ب) أكتب المعادلات الوسيطة للمستقيم (Δ) .

ج) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC) .

3: t عدد حقيقي موجب.

G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, 2), (C, t)\}$

(أ) تحقق أن G موجودة.

(ب) لتكن النقطة I المعرفة بالعلاقة: $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \overline{0}$.

حدد احداثيات النقطة I.

(ج) أكتب الشعاع \overline{IG} بدلالة الشعاع \overline{IC} .

(د) بين أن مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $[0, +\infty[$ هي مجموعة نقاط القطعة $[IC]$ ما عدا النقطة C.

(هـ) حدد قيمة t حتى تكون G منتصف $[IC]$.

65: A, B, C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و G_K

مرجح الجملة: $\{(A, K^2 + 1), (B, K), (C, -K)\}$

حيث: K عدد حقيقي من المجال $[-1, 1]$.

1: (أ) مثل النقاط A, B, C, I حيث: I منتصف القطعة $[BC]$.

(ب) بين أن: $\overline{AG_1} = \overline{CI}$ ، $\overline{AG_{-1}} = \overline{BI}$

(ج) استنتج أن: A منتصف $[G_1 G_{-1}]$ وأن: $\overline{G_1 G_{-1}} = \overline{BC}$

ثم أنشئ النقطتين G_1, G_{-1} .

2: (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي K من المجال $[-1, 1]$:

$$\overline{AG_K} = \frac{-K}{K^2 + 1} \overline{BC}$$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1, 1]$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

(ج) استنتج مجموعة النقط G_K عندما يتغير K في المجال $[-1, 1]$.

3: حدد مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\|2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\|$$

66: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(2, 0, 1)$ ، $B(3, 2, 0)$ ، $C(-1, -2, 2)$

والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x + 2y - z + 7 = 0$.

1: تحقق أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة ثم بين أن

المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y + 2z - 2 = 0$.

2: (أ) تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ثم عين تمثيلا

وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

(ب) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

3: لتكن G مرجحا للجملة المثقلة: $\{(A, 1), (B, \alpha), (C, \beta)\}$

حيث α, β عدنان حقيقيان يحققان: $\alpha + \beta \neq -1$

عين قيمة العدد α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

67: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(0, 2, 1)$ ، $B(-1, 1, -3)$ ، $C(1, 0, -1)$.

1: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها C وتشمل النقطة A.

2: ليكن المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيط:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

(أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويعامد (Δ) .

(ب) أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) .

(ج) استنتج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) وسطح الكرة (S).

68: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة التقني رياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$ النقاط: $A(1, 2, 2)$ ، $B(3, 2, 1)$ ، $C(1, 3, 3)$.

(1) أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستويا يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

(2) نعتبر المستويين $(P_1), (P_2)$ المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين التاليتين

$$\text{على الترتيب: } x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad , \quad x - 3y + 2z + 2 = 0$$

أثبت أن المستويين $(P_1), (P_2)$ متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ) .

(3) بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

(4) بين أن $\vec{u}(2, 0, -1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

(5) استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

(6) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (Δ) .

أوجد قيمة الوسيط t حتى يكون الشعاعان \vec{AM} ، \vec{u} متعامدين ثم استنتج

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

69: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقطة $A(1, -2, 1)$ والشعاع $\vec{u}(-2, 1, 5)$.

1: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A وشعاع

ناظم له الشعاع \vec{u} .

2: بين أن المستوي (P) عمودي على المستوي (P') المعروف

$$\text{بالمعادلة: } x + 2y - 7 = 0$$

3: ليكن المستقيم (Δ) الناتج من تقاطع المستويين (P) و (P') .

بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة $B(-1, 4, -1)$ وشعاع توجيه

$$\text{له } \vec{v}(2, -1, 1)$$

4: أحسب بعد النقطة $C(5, -2, -1)$ عن كل من المستويين

$(P), (P')$ ثم استنتج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) .

5: من أجل كل عدد حقيقي t نعتبر النقطة M التي إحداثياتها

$$(1 + 2t, 3 - t, t)$$

(أ) تحقق أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

(ب) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(t) = CM^2$.

بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب تحديدها ثم استنتج بعد

النقطة C عن المستقيم (Δ) .

70: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(1, 1, 0)$ ، $B(1, 2, 1)$ ، $C(3, -1, 2)$

1: (أ) أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

(ب) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x + y - z - 3 = 0$.

2: نعتبر المستويين $(P), (P')$ المعرفين بالمعادلتين التاليتين على

$$\text{الترتيب: } x + 2y - z - 4 = 0 \quad , \quad 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين $(P), (P')$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيط:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

3: حدد تقاطع المستويات $(P), (P'), (ABC)$.

4: أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

71: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $C(0, 1, 3)$ ، $B(1, 0, 2)$ ، $A(2, -3, -1)$

النقاط: $C(4, -2, 5)$ ، $B(1, 2, 4)$ ، $A(3, 2, 6)$

1: بين أن النقاط A ، B ، C تعين مستويا.

1: بين أن الشعاعين \overline{AB} ، \overline{AC} متعامدان.

2: أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

2: أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

3: θ عدد حقيقي حيث: $-\pi \leq \theta < \pi$.

3: عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي

نعرف المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z)

(ABC) ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\theta x - 2(\sin \theta)y + 2z + \theta^2 - \cos^2 \theta = 0$

4: لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها O وتشمل النقطة A .

أ) بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω وطول

نصف قطرها R .

أ) بين أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (C) مركزها H .

ب) أدرس حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) و سطح الكرة (S) .

ب) احسب طول نصف قطر الدائرة (C) .

ج) في حالة المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) .

5: لتكن G مرجح الجملة $\{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

عين إحداثيات نقطة التماس H .

أ) عين إحداثيات النقطة G ثم احسب بعد G عن المستوي (ABC) .

72: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

ب) بين أن المجموعة (S') للنقط M من الفضاء حيث:

النقاط: $D(0, 4, -1)$ ، $C(6, -2, -1)$ ، $B(6, 1, 5)$ ، $A(3, -2, 2)$

$\|3\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 4$ هي سطح كرة يطلب تحديد مركزها

1) برهن أن المثلث ABC قائم في A .

وطول نصف قطرها R .

2) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

ج) استنتج أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S') .

3) أحسب الحجم V لرباعي الوجوه $ABCD$.

74: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

4) عين قياسا بالراديان للزاوية $(\overline{DB}, \overline{DC})$.

المستويين (P_1) ، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

5) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) العمودي على (AC) في A .

$$y - 2z + 12 = 0 \quad , \quad 2y + z - 6 = 0$$

6) ليكن (P') المستوي المعرف بالمعادلة: $x + y + z - 3 = 0$.

1) برهن أن المستويين (P_1) ، (P_2) متعامدان.

برهن أن المستوي (P') عمودي على المستقيم (AB) في A .

2) تعطى النقطتان $A(3, 0, 6)$ ، $B(0, 0, 6)$

7) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) ، (P') .

بين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق المستقيم (AB) .

3) عين إحداثيات النقطتين C, D نقطتي تقاطع المحور $(O; J)$ مع كل

من المستويين $(P_1), (P_2)$ على الترتيب.

4) أكتب معادلة للمستوي (P_3) الذي يشمل C وشعاع ناظم له \overline{AD} .

5) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) ثم عين إحداثيات النقطة E

نقطة تقاطع المستقيم (OA) والمستوي (P_3) .

6) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة إلى المثلث ACD ؟

75: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(1, -1, 3), B(1, 1, 3), C(1, 1, -3)$

$D(19, -1, 3), E(19, 1, 3), F(19, 1, -3)$

1: أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC .

2: بين أن الشعاع \overline{AD} ناظم للمستوي (ABC) ثم أكتب معادلة

ديكارتية للمستوي (ABC) .

3: بين أن الشعاعين $\overline{AB}, \overline{CE}$ غير مرتبطين خطيا وأعط تفسيرا للنتيجة

4: عين إحداثيات النقطة G حيث يكون الرباعي $ABCG$ مستطيل.

5: تحقق أن النقاط D, E, F ليست على استقامة واحدة.

6: أدرس الوضع النسبي للمستويين $(ABC), (DEF)$.

7: أ) احسب الأطوال a, b, c للقطع $[AB], [BC], [AD]$ على الترتيب

ب) بين أن المتتالية (a, b, c) هندسية ثم حدد أساسها q .

76: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O; I, J, k)$ النقاط: $A(1, 2, 3), B(0, 1, 4), C(-1, -3, 2), D(4, -2, 5)$

1: بين أن النقاط A, B, C تعين مستويا.

2: أوجد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3: أ) تحقق أن الشعاع $\overline{u}(2, -1, 1)$ يعامد كل من الشعاعين $\overline{AB}, \overline{AC}$

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

4: (Δ) مستقيم يشمل النقطة D وشعاع توجيه له $\vec{v}(-2, 1, -1)$

بين أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

5: أثبت أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

النقاط: $A(6, -6, 6), B(-6, 0, 6), C(-2, -2, 11)$

1) أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها B وتشمل النقطة A .

2) أكتب معادلة للمستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في A .

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على (P) ويشمل C .

4) حدد إحداثيات النقطة D نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) .

5) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين $(AD), (BC)$.

77: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$

نعتبر المستقيمين $(\Delta), (\Delta')$ المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على

$$\begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} ; \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 0.5\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{الترتيب:}$$

حيث: α, λ عددان حقيقيان.

1: بين أن المستقيمين $(\Delta), (\Delta')$ لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: M, N نقطتان متغيرتان من $(\Delta), (\Delta')$ على الترتيب.

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على

كل من المستقيمين $(\Delta), (\Delta')$.

ب) أحسب الطول MN .

3: عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (Δ) ويوازي (Δ') .

4: أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) ، ماذا تلاحظ ؟

79: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; I, J, k)$ المستويين $(P_1), (P_2)$ المعرفين بالمعادلتين

$$2x + 2y - z - 4 = 0, \quad 2x - y + 2z - 5 = 0$$

1: بين أن المستويين $(P_1), (P_2)$ متعامدان.

2: أحسب بعد النقطة $A(1, 2, -1)$ عن كل من المستويين (P_1) و (P_2)

3: أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين $(P_1), (P_2)$.

ب) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

4: M نقطة متغيرة من (Δ) ، عين إحداثيات النقطة M حيث تكون

المسافة AM أصغر ما يمكن ثم استنتج بعد النقطة A عن (Δ) .

80: $(O; I, J, k)$ معلم متعامد ومجانس للفضاء و $SABCD$ هرم رأسه

S وقاعدته $ABCD$ حيث: $S(0, 0, 5)$ ، $A(0, 2, 0)$ ، $B(2, 0, 0)$ ،

$$C(0, -2, 0) , D(-2, 0, 0)$$

1: بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2: حدد دون حساب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقاط A, B, C, D

3: أ) تحقق أن الشعاع $\vec{u}(5, 5, 2)$ ناظم للمستوي (ABS) .

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABS) .

4: تحقق أن معادلة المستوي (BCS) هي: $5x - 5y + 2z - 10 = 0$

5: أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة

$$E(0, 1, 0) \text{ ويوازي المستوي } (BCS).$$

ب) حدد نقاط تقاطع المستوي (P') مع كل من المستقيمات:

$$(OI), (OJ), (OK).$$

81: $(O; I, J, K)$ معلم متعامد ومجانس للفضاء.

نعتبر المجموعة (S_m) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2my - 4mz - 1 = 0$$

1) أثبت أن (S_m) سطح كرة ثم حدد مركزها ω ونصف قطرها R .

2) بين أن مجموعة النقط ω هي مستقيم يطلب تحديد مركبات شعاع توجيه له.

3) أثبت أن المجموعة (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C) يطلب إعطاء مركزها وطول نصف قطرها.

4) ليكن (P) المستوي المعرف بالمعادلة: $x - y - z + \sqrt{3} = 0$

حدد قيمة m التي من أجلها يكون (P) مماسا لسطح الكرة (S_m) .

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومجانس $(O; I, J, K)$

نعتبر النقاط: $A(1, 0, 2)$ ، $B(0, 2, 1)$ ، $C(2, 1, 3)$

1: (P) مستو معادلة له من الشكل $x - z + 1 = 0$

أ) بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟

2: أ) تحقق من أن النقطة $D(2, 3, 4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .

ب) حدد طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

3: أ) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

ب) أحسب حجم الرباعي $ABCD$.

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات،

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, K)$.

نعتبر النقطتين $A(2, 1, 2)$ ، $B(0, 2, -1)$ والمستقيم (D) ذو

$$\text{التمثيل الوسيطى: } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \text{ حيث: } t \in \mathbb{R}$$

1: أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (D) .

أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 5, 1)$ عمودي على المستوي (P) .

ب) أكتب معادلة للمستوي (P) .

ج) بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من المستقيم (D) والمستوي

(P) مستقلة عن موضع النقطة M .

د) عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz)

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, K)$

المستويين (P_1) ، (P_2) حيث: $x + 2y - z - 2 = 0$ معادلة للمستوي (P_1)

$$\text{و } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ تمثيل وسيطي للمستوي } (P_2) \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$$

1: أكتب معادلة للمستوي (P_2) .

2: عين شعاعا ناظميا \vec{n}_1 للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا \vec{n}_2 للمستوي (P_2)

3: بين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متعامدان.

4: أ) $A(3, 1, 1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النقطة A

والمستوي (P_1) والمسافة d_2 بين النقطة A والمستوي (P_2) .

ب) استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2) .

5: أ) عين تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث: λ عدد حقيقي.

ب) M نقطة كيفية من المستقيم (Δ) .

احسب AM^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ) .

بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة التقني رياضيات.

1: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, K)$

النقاط: $A(1, 1, 2)$ ، $B(-1, 0, -2)$ ، $C(-1, 0, -6)$

بين أن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق: $AM^2 - BM^2 = 1$

هي مستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) يطلب تعيين معادلة له.

2: لتكن (S) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

برهن أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R .

3: G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة: $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

أ) عين احداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى (S) .

ب) أكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G .

86: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

■ توجد إجابة واحدة فقط صحيحة يطلب تعيينها مع التعليل.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, K)$.

نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x - 3z - 4 = 0$ والنقاط:

$A(1, 3, -1)$ ، $B(4, 1, 0)$ ، $C(-2, 0, -2)$ ، $D(3, 2, 1)$

1: المستوي (P) هو:

أ) (BCD) ، ب) (ABC) ، ج) (ABD) .

(4) التمثيل الوسيط للمستقيم (CD) هو:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي

(5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

حلول التمارين والمسائل

الجداء السلمي:

1: حساب جيب تمام الزاوية (\vec{u}, \vec{v}) .

لدينا: $\vec{u}(0, 3, 4)$ ، $\vec{v}(2, 2, 1)$ ومنه: $\|\vec{u}\| = 5$ ، $\|\vec{v}\| = 3$.

لدينا من جهة: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(0) + (2)(3) + (1)(4) = 10$

ومن جهة أخرى: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

أي: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2}{3}$ إذن: $10 = 5 \times 3 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

2: (1) تحديد قياس للزاوية (\vec{u}, \vec{v}) .

لدينا: $\vec{u}(1, 1, 0)$ ، $\vec{v}(0, 1, 1)$ ومنه: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

لدينا من جهة: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0)(1) + (1)(1) + (1)(0) = 1$

ومن جهة أخرى: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

أي: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}$ معناه: $1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

إذن: قياس الزاوية (\vec{u}, \vec{v}) هو: $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.

2) تعيين قيمة كل من العددين a, b .

بما أن: \vec{w} عمودي على \vec{u} ، \vec{v} فإن: $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ و $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -a = 1 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 1 + a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

إذن: مركبات الشعاع \vec{w} هي $(1, -1, 1)$.

لدينا: $\|\vec{w}\|^2 = (1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 3$ ومنه: $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

3: (1) حساب $\overline{BD} \cdot \overline{DC}$ واستنتاج نوع المثلث BCD.

$$\text{لدينا: } \overline{BD}(0, -4, 0), \overline{DC}(0, 0, 6)$$

ومنه: $\overline{BD} \cdot \overline{DC} = 0$ إذن: المثلث BCD قائم في النقطة D.

$$\text{المساحة } S \text{ للمثلث BCD تعطى بالعلاقة: } S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{DC}$$

$$\text{لدينا: } \overline{BD} = 4 \text{ و } \overline{DC} = 6 \text{ ومنه: } S = \frac{1}{2} \times (4) \times (6) = 12$$

(2) إثبات أن (AC) عمودي على المستوي (BCD).

■ نعلم أنه إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فإنه عمودي على هذا المستوي.

$$\text{لدينا: } \overline{AC}(-2, 0, 0), \overline{BD}(0, -4, 0), \overline{DC}(0, 0, 6)$$

$$\text{ومنه: } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \text{ و } \overline{AC} \cdot \overline{DC} = 0$$

ومنه: الشعاع \overline{AC} عمودي على كل من الشعاعين \overline{BD} ، \overline{DC} .

معناه: المستقيم (AC) عمودي على كل من المستقيمين (BD) و (DC).

إذن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD).

$$\text{■ الحجم } V \text{ لرباعي الوجوه } ABCD \text{ يعطى بالعلاقة: } V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

حيث: h الارتفاع و S مساحة القاعدة BCD.

$$\text{لدينا: } h = \overline{AC} = 2 \text{ ومنه: } V = \frac{1}{3} (12)(2) = 8$$

4: تعيين الأشعة \overline{w} العمودية على \overline{u} و \overline{v} .

بما أن: \overline{w} عمودي على \overline{u} و \overline{v} فإن: $\overline{w} \cdot \overline{u} = 0$ و $\overline{w} \cdot \overline{v} = 0$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} -2a - 4b - 6c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{بالجمع نجد: } -b - 5c = 0 \text{ معناه: } b = -5c$$

$$\text{نعوض عن } b \text{ في المعادلة: } a + 2b + 3c = 0 \text{ فنجد: } a = 7c$$

ومنه: مركبات الأشعة العمودية على \overline{u} و \overline{v} هي:

$$(7c, -5c, c) \text{ مع: } c \text{ عدد حقيقي}$$

إذن: الأشعة \overline{w} هي الأشعة المرتبطة خطيا مع الشعاع $\overline{m}(7, -5, 1)$

$$\text{5: حساب } \overline{AB} \cdot \overline{AD} \text{ و } \overline{AC} \cdot \overline{BA}$$

$$\text{نعلم أن: } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos(\overline{AB}, \overline{AD})$$

$$\text{ومنه: } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} a^2$$

$$\text{لدينا: } \overline{AC} \cdot \overline{BA} = -\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{ومنه: } \overline{AC} \cdot \overline{BA} = -a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} a^2$$

استنتاج قيمة $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$:

$$\text{لدينا: } \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\overline{CA} + \overline{AD}) = \overline{AB} \cdot \overline{CA} + \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$\text{ومنه: } \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BA} + \overline{AB} \cdot \overline{AD} = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0$$

بما أن: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ فإن: المستقيمين (AB) ، (CD) متعامدان.

$$\text{6: (1) حساب } \overline{EA} \cdot \overline{EB} \text{ و } \overline{AE} \cdot \overline{AD}$$

$$\text{نعلم أن: } \overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{EA} \times \overline{EB} \times \cos(\overline{EA}, \overline{EB})$$

$$\text{ومنه: } \overline{EA} \cdot \overline{EB} = 4 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 16 \left(\frac{1}{2} \right) = 8$$

$$\text{بالمثل نجد: } \overline{AE} \cdot \overline{AD} = 8$$

(2) تبين أن: (EA) ، (EC) متعامدان.

$$\text{لدينا: } \overline{EA} \cdot \overline{EC} = \overline{EA} \cdot (\overline{EB} + \overline{BC})$$

$$\text{ومنه: } \overline{EA} \cdot \overline{EC} = \overline{EA} \cdot \overline{EB} + \overline{EA} \cdot \overline{BC}$$

$$\text{بما أن: } \overline{BC} = \overline{AD} \text{ و } \overline{EA} = -\overline{AE}$$

$$\text{فإن: } \overline{EA} \cdot \overline{EC} = \overline{EA} \cdot \overline{EB} - \overline{AE} \cdot \overline{AD} = 8 - 8 = 0$$

وهذا يعني أن: المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: كتابة معادلة لسطح الكرة (S):

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

تتبع النقطة M الى سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$.

$$\text{لدينا: } \overline{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}, \overline{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \quad \text{تكافئ: } (x-3)(x-1) + y(y-2) + z(z-1) = 0$$

$$\text{بعد النشر والتبسيط نجد: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - z + 3 = 0$$

8: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

بما أن: سطح الكرة (S) يشمل المبدأ O فإن: معادلة (S) من الشكل:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$$

وبما أن: النقاط A, B, C تنتمي إلى (S) فإن إحداثياتها تحقق المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ c = \frac{-13 - 3a}{2} = -5 \\ b = \frac{-9 - a - 2c}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه: } \begin{cases} a + 1 = 0 \\ 3a + 2c + 13 = 0 \\ a + 2b + 2c + 9 = 0 \end{cases}$$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 5z = 0$

9: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

نصف قطر سطح الكرة (S) هو البعد بين المركز A والمستوي (P)

$$\text{ومنه: } r = \frac{|1 - 1 + 1 - 4|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

10: تعيين إحداثيات نقط تقاطع (Δ) و (S).

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\text{ومنه: } (1)^2 + (2t)^2 + (2-2t)^2 - 2(1) - 3 = 0$$

$$\text{نجد: } 8t^2 - 8t = 0 \quad \text{أي: } 8t(t-1) = 0 \quad \text{ومنه: } t=0 \text{ أو } t=1$$

إذن: إحداثيات نقطتا تقاطع المستقيم (Δ) و سطح الكرة (S) هما:

$$(1, 2, 0), (1, 0, 2)$$

11: تعيين المركز A وطول نصف القطر r للدائرة (C).

$$\text{لدينا معادلة سطح الكرة (S) هي: } x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$$

$$\text{أي: } (x-1.5)^2 + y^2 + z^2 = 2.25$$

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $\omega(1.5, 0, 0)$ وطول نصف قطرها

$$R = \sqrt{2.25} = 1.5$$

$$\text{بعد المركز } \omega \text{ عن المستوي (P) هو: } \frac{|1.5 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

بما أن: $1.5 < \frac{\sqrt{3}}{6}$ فإن: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة

(C) مركزها النقطة A المسقط العمودي للمركز ω على المستوي (P).

المستقيم (ωA) يشمل النقطة ω وشعاع توجيه له $\vec{u}(1, 1, 1)$.

ومنه: المعادلات الوسيطة للمستقيم (ωA) هي:

$$\begin{cases} x = 1.5 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x + y + z - 1 = 0$

$$\text{ومنه: } 1.5 + t + t + t - 1 = 0 \quad \text{نجد: } t = -\frac{1}{6}$$

$$\text{من أجل: } t = -\frac{1}{6} \quad \text{نجد: } (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

إذن: إحداثيات النقطة A مركز الدائرة (C) هي: $\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$.

نصف القطر r للدائرة (C) هو:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (1.5)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{13}{6}$$

إذن: $r = \sqrt{\frac{13}{6}}$

12: (1) حساب طول نصف قطر سطح الكرة (S).

طول نصف القطر r لسطح الكرة (S) هو بعد المركز A عن (P).

$$r = \frac{|2 - 2(-1) + 2(3) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

ومنه:

(2) تحديد إحداثيات نقطة التماس B.

الشعاع $\vec{u}(1, -2, 2)$ ناظم للمستوى (P) وشعاع توجيهه للمستقيم (AB).

ومنه: المعادلات الوسيطة للمستقيم (AB) هي:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي.

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x - 2y + 2z - 1 = 0$

ومنه: $(2 + t) - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) - 1 = 0$ أي: $t = -1$

من أجل: $t = -1$ نجد: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

إذن: إحداثيات نقطة التماس B هي $(1, 1, 1)$.

13: تحديد مجموعة النقط (S).

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0 \quad (1)$$

لدينا: $a = -8, b = c = d = 0$ ومنه: $\Delta = 64 > 0$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $A(4, 0, 0)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 4$.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 5 = 0 \quad (2)$$

لدينا: $a = -4, b = 0, c = 2, d = 5$

$$\Delta = (-4)^2 + (0)^2 + (2)^2 - (4)(5) = 0$$

ومنه: إذن: المجموعة (S) تشمل نقطة واحدة A إحداثياتها $(2, 0, -1)$.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0 \quad (3)$$

لدينا: $a = 0, b = -2, c = 0, d = 2$

$$\Delta = (0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 - 4(2) = -4 < 0$$

إذن: المجموعة (S) هي المجموعة الخالية.

14: تعيين المجموعة (S) للنقط M.

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 4 \quad \text{ومنه: } (\overline{OM} - \overline{OA}) \cdot (\overline{OM} - \overline{OB}) = 4$$

$$\overline{OM}^2 - \overline{OM} \cdot \overline{OB} - \overline{OM} \cdot \overline{OA} = 4 \quad \text{أي:}$$

$$\overline{OM}^2 - \overline{OM} \cdot (\overline{OB} + \overline{OA}) = 4 \quad \text{معناه:}$$

بما أن: النقطة O منتصف [AB] فإن: $\overline{OB} + \overline{OA} = \vec{0}$

وبالتالي: المعادلة $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 4$ تكافئ: $\overline{OM}^2 = 4$

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقاط سطح كرة مركزها المبدأ O

وطول نصف قطرها 2.

15: تبين أنه توجد كرتان تماسان المستوي (P).

نفرض $\omega(a, b, c)$ مركز سطح الكرة التي تماس المستوي (P).

بما أن: النقطة A تنتمي الى سطح هذه الكرة

$$A\omega = 5 \quad \text{أي: } A\omega^2 = 25$$

$$(1) \quad (a-3)^2 + (b-2)^2 + (c-5)^2 = 25$$

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $4x - 3z + 3 = 0$

ومنه الشعاع $\vec{u}(4, 0, -3)$ ناظم للمستوي (P).

الشعاعان \bar{u} ، $\bar{A\omega}$ مرتبطان خطياً.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\bar{A\omega} = \alpha \bar{u}$

$$\begin{cases} a = 4\alpha + 3 \\ b = 2 \\ c = -3\alpha + 5 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} a - 3 = 4\alpha \\ b - 2 = 0 \\ c - 5 = -3\alpha \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

نعوض عن الأعداد a, b, c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2 = 1$

ومنه: $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$.

إذن: توجد كرتان تماسان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما:

$$\omega_1(7, 2, 2) , \omega_2(-1, 2, 8)$$

المعادلة الديكارتية لمستوى:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\bar{u}(2, 1, 3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x + y + 3z + d = 0$

وبما أن: النقطة $A(1, 0, 1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1) + (0) + 3(1) + d = 0$ ومنه: $d = -5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x + y + 3z - 5 = 0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة [AB] هي: $(3, 3, 2)$.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء .

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overline{CM} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \overline{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا:}$$

ومنه: $12(x-3) + 2(y-3) + 2(z-2) = 0$

معناه: $6x + y + z - 23 = 0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\bar{u}(a, b, c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: \bar{u} عمودي على كل من الشعاعين \bar{AB} ، \bar{AC} .

وبالتالي: $\bar{u} \cdot \bar{AB} = 0$ و $\bar{AC} \cdot \bar{u} = 0$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} b - c = 0 \\ -2a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

نأخذ $c = 1$ فنجد: $b = 1$ ، $a = 0$ إذن: $\bar{u}(0, 1, 1)$

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overline{AM} \cdot \bar{u} = 0$

أي: $0(x-1) + (y-0) + (z-2) = 0$ معناه: $y + z - 2 = 0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا

كانت الأشعة \overline{AM} ، \overline{AB} ، \overline{AC} مرتبطة خطياً.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أي:}$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي: $(x-1)(0) - y(2) + (z-2)(-2) = 0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y - 2z + 4 = 0$

أي: $y + z - 2 = 0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P)

من الشكل: $x + 2y + 3 + \alpha(3x - 2z - 5) = 0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2, -3, 1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$$2 + 2(-3) + 3 + \alpha[3(2) - 2(1) - 5] = 0 \quad \text{ومنه:} \quad \alpha = -1$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x + 2y + 3 - (1)(3x - 2z - 5) = 0$

أي: $-x + y + z + 4 = 0$

الشعاعان \bar{u} ، $\bar{A\omega}$ مرتبطان خطياً.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\bar{A\omega} = \alpha \bar{u}$

$$\begin{cases} a = 4\alpha + 3 \\ b = 2 \\ c = -3\alpha + 5 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} a - 3 = 4\alpha \\ b - 2 = 0 \\ c - 5 = -3\alpha \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

نعوض عن الأعداد a, b, c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2 = 1$

ومنه: $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$.

إذن: توجد كرتان تسمان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما:

$$\omega_1(7, 2, 2) , \omega_2(-1, 2, 8)$$

المعادلة الديكارتية لمستوي:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\bar{u}(2, 1, 3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x + y + 3z + d = 0$

وبما أن: النقطة $A(1, 0, 1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1) + (0) + 3(1) + d = 0$ ومنه: $d = -5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x + y + 3z - 5 = 0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة [AB] هي: $(3, 3, 2)$.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء .

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overline{CM} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \overline{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا:}$$

ومنه: $12(x-3) + 2(y-3) + 2(z-2) = 0$

معناه: $6x + y + z - 23 = 0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\bar{u}(a, b, c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: \bar{u} عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} ، \overline{AC} .

وبالتالي: $\bar{u} \cdot \overline{AB} = 0$ و $\bar{u} \cdot \overline{AC} = 0$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} b - c = 0 \\ -2a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

نأخذ $c = 1$ فنجد: $b = 1$ ، $a = 0$ ، إذن: $\bar{u}(0, 1, 1)$

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overline{AM} \cdot \bar{u} = 0$

أي: $0(x-1) + (y-0) + (z-2) = 0$ معناه: $y + z - 2 = 0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا

كانت الأشعة \overline{AM} ، \overline{AB} ، \overline{AC} مرتبطة خطياً.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أي:}$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي: $(x-1)(0) - y(2) + (z-2)(-2) = 0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y - 2z + 4 = 0$

أي: $y + z - 2 = 0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P)

من الشكل: $x + 2y + 3 + \alpha(3x - 2z - 5) = 0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2, -3, 1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$$2 + 2(-3) + 3 + \alpha[3(2) - 2(1) - 5] = 0 \quad \text{ومنه:} \quad \alpha = -1$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x + 2y + 3 - (1)(3x - 2z - 5) = 0$

أي: $-x + y + z + 4 = 0$

20: كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P).

بما أن: النقطة $A(-1, 2, 3)$ تنتمي إلى المستوى (P) فإن: معادلة المستوى (P) من الشكل: $a(x+1)+b(y-2)+c(z-3)=0$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوى (P) يوازي المستوى المعروف بالمعادلة:

$$-x+2y+z-3=0$$

فإن: شعاع ناظم للمستوى (P) هو: $\vec{u}(-1, 2, 1)$

إذن: معادلة المستوى (P) هي:

$$(-1)(x+1)+(2)(y-2)+(z-3)=0$$

$$\text{أي: } -x+2y+z-8=0$$

21: تبين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) هو B.

تكون النقطة B المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) إذا وفقط إذا كان: النقطة B تنتمي إلى المستوى (P).

الشعاعان \vec{BA} ، \vec{u} مرتبطان خطيا حيث \vec{u} ناظم للمستوى (P)

$$\text{لدينا: } 5(-1)-(1)+(0)+6=-6+6=0$$

ومنه إحداثيات B تحقق المعادلة: $5x-y+z+6=0$

وهذا يعني أن: النقطة B تنتمي إلى المستوى (P) (1)

لدينا معادلة المستوى (P) هي: $5x-y+z+6=0$

ومنه: الشعاع $\vec{u}(5, -1, 1)$ ناظم للمستوى (P)

لدينا أيضا: مركبات الشعاع \vec{BA} هي $(-5, 1, -1)$

$$\text{واضح أن: } \vec{u} = -\vec{BA}$$

ومنه: الشعاعان \vec{BA} ، \vec{u} مرتبطان خطيا (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

22: كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P).

بما أن: المستوى (P) يشمل النقطة $A(1, 0, -2)$ فإن: معادلة (P) من الشكل: $a(x-1)+by+c(z+2)=0$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوى (P) عمودي على كل من المستويين المعروفين

$$\text{بالمعادلتين } 2x+y-z-2=0 \text{ ، } -x+y+z+3=0$$

فإن: الشعاع الناظم $\vec{u}(a, b, c)$ للمستوى (P) عمودي على كل من

الشعاعين $\vec{m}(-1, 1, 1)$ ، $\vec{n}(2, 1, -1)$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases} \quad \text{معناه: } \begin{cases} 2a+b-c=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{نجد: } a=-2b \text{ و } c=-3b$$

من أجل: $b=1$ مثلا نجد: $a=-2$ ، $c=-3$

إذن: معادلة المستوى (P) هي: $(-2)(x-1)+y+(-3)(z+2)=0$

$$\text{أي: } -2x+y-3z-4=0$$

23: تبين أن النقاط A, B, C, D من مستو واحد.

لإثبات أن النقاط A, B, C, D من مستو واحد نشكل معادلة المستوى

(ABC) ثم نبين أن النقطة D تنتمي إلى هذا المستوى.

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوى (ABC) إذا وفقط إذا كانت:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ y+3 & 3 & 2 \\ z-4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{معناه: } (x-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{وبالتالي: } -2(x-2)-2(y+3)-2(z-4)=0$$

إذن: معادلة المستوى (ABC) هي: $x+y+z-3=0$

واضح أن إحداثيات النقطة D تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

إذن: النقاط A, B, C, D تنتمي إلى مستو واحد.

24: كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ') .

فإن: معادلة (P) تكتب من الشكل:

$$x + 2z - 4 + \alpha(y - z - 2) = 0 \quad \text{حيث: } \alpha \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\text{أي: } x + \alpha y + (2 - \alpha)z - 4 - 2\alpha = 0$$

وبما أن: المستوي (P) يوازي المستقيم (Δ)

فإن: شعاع ناظم للمستوي (P) عمودي على شعاع توجيه (Δ) .

مركبات شعاع ناظم للمستوي (P) هي $(1, \alpha, 2 - \alpha)$ ومركبات شعاع

توجيه (Δ) هي: $(1, 1.5, 2)$

$$\text{ومنه: } 1 + 1.5\alpha + 2(2 - \alpha) = 0 \quad \text{نجد: } \alpha = 10$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x + 2z - 4 + 10(y - z - 2) = 0$

$$\text{أي: } x + 10y - 8z - 24 = 0$$

25: تحديد المجموعة (P) للنقط M.

$$\text{تذكير: } |x| = |y| \quad \text{تكافئ: } x = y \quad \text{أو} \quad x = -y$$

$$\text{لدينا: } |2x - y + z + 2| = |x - y + 2z| \quad \text{ومنه:}$$

$$(2x - y + z + 2) = -(x - y + 2z) \quad \text{أو} \quad (2x - y + z + 2) = (x - y + 2z)$$

$$\text{أي: } 3x - 2y + 3z + 2 = 0 \quad \text{أو} \quad x - z + 2 = 0$$

إذن: المجموعة (P) هي اتحاد مجموعة نقط المستويين المعرفين

$$\text{بالمعادلتين: } 3x - 2y + 3z + 2 = 0 \quad , \quad x - z + 2 = 0$$

26: 1: تبين أن المجموعة (P_m) مستوي.

$$\text{لدينا: } x + (2m + 1)y + (3m + 2)z - 1 = 0$$

بما أن: معامل المتغير x لا يعدم فإن: (P_m) مستوي من الفضاء.

2: إثبات أن (P_m) يشمل مستقيماً ثابتاً.

$$\text{المعادلة: } x + (2m + 1)y + (3m + 2)z - 1 = 0$$

$$\text{تكافئ: } x + y + 2z - 1 + m(2y + 3z) = 0$$

ومنه: المستوي (P_m) يشمل المستقيم المعروف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

3: أ) تعيين المستوى الذي يشمل النقطة $A(3, 1, 1)$.

تتتمي النقطة A إلى المستوي (P_m) إذا كان:

$$(3) + (2m + 1)(1) + (3m + 2)(1) - 1 = 0$$

$$\text{أي: } 5m + 5 = 0 \quad \text{معناه: } m = -1$$

إذن: المستوي الذي يشمل النقطة A هو (P_{-1}) .

ب) تعيين المستوى الذي يعامد المستوي (P') .

يتعامد المستويان (P_m) ، (P') إذا كان شعاعا ناظميها متعامدين.

الشعاعان الناظميان للمستويين (P_m) ، (P') هما على التوالي:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2m + 1 \\ 3m + 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{تكافئ: } (2)(1) + (2m + 1)(-1) + (3m + 2)(1) = 0$$

$$\text{أي: } m + 3 = 0 \quad \text{وبالتالي: } m = -3$$

إذن: المستوى الذي يعامد المستوي (P') هو: (P_{-3}) .

بعد نقطة عن مستوي:

27: حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$$d = \frac{|2(-1) - 3(3) + (2) + 9|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}} = 0$$

ومنه: A تتتمي إلى المستوي (P') .

28: 1) تعيين إحداثيات المركز A وطول القطر R.

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 7 = 0$$

$$\text{ومنه: } a = -2, \quad b = 0, \quad c = 2, \quad d = -7$$

إذن: إحداثيات المركز A لسطح الكرة (S) هي:

$$\left(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2}, \frac{c}{-2} \right) = (1, 0, -1)$$

طول نصف القطر R هو: $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ حيث:

$$R = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3 \quad \text{ومنه: } \Delta = (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 - 4(-7) = 36$$

(2) حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$$d = \frac{|1 + 0 - 2(-1) + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$\text{لدينا: } \sqrt{6} < 3 \quad \text{أي: } d < R$$

ومنه: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

29: 1) تبين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متعامدان.

المعادلتان الديكاريتيتان للمستويين (P_1) ، (P_2) هما على التوالي:

$$-x + 2y + z + 5 = 0, \quad x - y + 3z + 1 = 0$$

ومنه: الشعاعان الناظميان للمستويين (P_1) ، (P_2) هما:

$$\vec{u}_1(1, -1, 3), \quad \vec{u}_2(-1, 2, 1) \quad \text{على الترتيب.}$$

$$\text{بما أن: } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-1)(1) + (2)(-1) + (1)(3) = 0$$

فإن: المستويين (P_1) ، (P_2) متعامدان.

(2) حساب بعد النقطة A عن كل من (P_1) ، (P_2) .

لتكن H_1 ، H_2 ، H_3 المساقط العمودية للنقطة A على (P_1) ، (P_2) ، (Δ)

على الترتيب

$$\text{ومنه: } AH_1 = \frac{|1 - 2 + 3(-1) + 1|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$AH_2 = \frac{|-1 + 2(2) - 1 + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$$

إذن: بعد A عن (P_1) هو: $\frac{3}{\sqrt{11}}$ وبعد A عن (P_2) هو: $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

استنتاج بعد A عن المستقيم (Δ) :

الرباعي $AH_1H_3H_2$ مستطيل ومنه: $AH_3^2 = AH_1^2 + H_1H_3^2$

$$\text{معناه: } AH_3^2 = AH_1^2 + AH_2^2$$

$$\text{أي: } AH_3^2 = \frac{9}{11} + \frac{49}{6} = \frac{593}{66} \quad \text{ومنه: } AH_3 = \sqrt{\frac{593}{66}}$$

إذن: بعد A عن المستقيم (Δ) هو: $\sqrt{\frac{593}{66}}$.

المرجح في الفضاء:

30: تبين أن E منتصف [DG].

بما أن: G مركز ثقل المثلث ABC فإنها مرجح للجملية:

$$\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$$

لدينا: E مرجح للجملية: $\{(D, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

ومنه: E مرجح للجملية $\{(D, 3), (G, 3)\}$

بما أن: معاملي النقطتين D، G متساويان فإن: E منتصف [DG].

31: برهان صحة: $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CG} + \vec{DH} = \vec{0}$

بما أن: K مركز ثقل كل من رباعي الوجوه ABCD، EFGH فإن:

$$(1) \quad \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$$

$$(2) \quad \vec{KE} + \vec{KF} + \vec{KG} + \vec{KH} = \vec{0}$$

34: (1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x, y, z) إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC فيكون:

$$z = \frac{-2+1+3}{3} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1+3+0}{3} = \frac{4}{3}, \quad x = \frac{4+(-1)+1}{3} = \frac{4}{3}$$

(2) تحديد إحداثيات النقطة D منتصف [AB].

إحداثيات النقطة D منتصف القطعة [AB] هي: $(1.5, 2, -0.5)$

$$\text{التحقق من صحة: } 3\overline{CG} - 2\overline{CD} = \vec{0}$$

مركبات كل من الشعاعين $3\overline{CG}$ ، $2\overline{CD}$ هما على التوالي:

$$(1, 4, -7), \quad (1, 4, -7)$$

$$\text{ومنه: } 3\overline{CG} = 2\overline{CD} \text{ معناه: } 3\overline{CG} - 2\overline{CD} = \vec{0}$$

إذن: النقطة C هي مرجح الجملة: $\{(G, 3), (D, -2)\}$

35: (1) تعيين الإحداثيات (x, y, z) .

مجموع معاملات النقاط A، B، C هو:

$$(b+c) + (a+c) + (a+b) = 2(a+b+c) \neq 0$$

$$\text{ومنه: } z = \frac{c(a+b)}{2(a+b+c)}, \quad y = \frac{b(a+c)}{2(a+b+c)}, \quad x = \frac{a(b+c)}{2(a+b+c)}$$

(2) حساب المجموع $x+y+z$:

$$x+y+z = \frac{(ab+ac) + (ab+bc) + (ac+bc)}{2(a+b+c)} = \frac{2(ab+ac+bc)}{2(a+b+c)} = 0$$

إذن: مجموعة النقط G محتواة في مجموعة نقاط المستوي المعروف

$$\text{بالمعادلة: } x+y+z=0$$

من (1) و (2) وبالطرح نجد:

$$(\overline{KE} - \overline{KA}) + (\overline{KF} - \overline{KB}) + (\overline{KG} - \overline{KC}) + (\overline{KH} - \overline{KD}) = \vec{0}$$

$$\text{أي: } (\overline{AK} + \overline{KE}) + (\overline{BK} + \overline{KF}) + (\overline{CK} + \overline{KG}) + (\overline{DK} + \overline{KH}) = \vec{0}$$

$$\text{معناه: } \overline{AE} + \overline{BF} + \overline{CG} + \overline{DH} = \vec{0}$$

32: برهان أن (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

بما أن: G، E مرجحان للجمليتين التاليتين على الترتيب:

$$\{(A, -1), (B, 2), (C, 1)\}, \quad \{(C, 1), (B, 2)\}$$

فإن: G مرجح للجملة $\{(A, -1), (E, 3)\}$

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (AE) (1)

بما أن: G، F مرجحان للجمليتين التاليتين على الترتيب:

$$\{(A, -1), (B, 2), (C, 1)\}, \quad \{(A, -1), (B, 2)\}$$

فإن: G مرجح للجملة $\{(F, 1), (C, 1)\}$

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (CF) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في G.

33: تعيين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء:

لدينا: G مرجح للجملة $\{(A, 2), (B, -3)\}$

$$\text{ومنه: } 2\overline{GA} - 3\overline{GB} = \vec{0}$$

لدينا أيضا: $2\overline{MA} - 3\overline{MB} = 2(\overline{MG} + \overline{GA}) - 3(\overline{MG} + \overline{GB})$

$$\text{ومنه: } 2\overline{MA} - 3\overline{MB} = -\overline{MG} + (2\overline{GA} - 3\overline{GB}) = \overline{GM}$$

$$\text{ومنه المعادلة: } \|2\overline{MA} - 3\overline{MB}\| = 4 \text{ تكافئ: } GM = 4$$

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقط سطح الكرة التي مركزها G

وطول نصف قطرها 4.

36: (1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x, y, z) إحداثيات النقطة G فنجد:

$$z = 0, \quad y = 4 + 3 = 7, \quad x = -3 + 7 = 4$$

(2) تحديد المجموعة (P) للنقط M.

لدينا: $-\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ ومنه:

$$\overline{MB} + \overline{MC} - \overline{MA} = (\overline{MG} + \overline{GB}) + (\overline{MG} + \overline{GC}) - (\overline{MG} + \overline{GA})$$

$$\overline{MB} + \overline{MC} - \overline{MA} = \overline{MG} + (\overline{GB} + \overline{GC} - \overline{GA}) = \overline{MG}$$

المعادلة: $\|\overline{MB} + \overline{MC} - \overline{MA}\| = OM$ تكافئ: $GM = OM$.

إذن: مجموعة النقط (P) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقاط

المستوي العمودي على القطعة [OG] في منتصفها.

37: تحديد مجموعة النقط (P) للنقط M.

نفرض G مرجح الجملة: $\{(A, 1), (B, -2)\}$ فيكون: $\overline{GA} - 2\overline{GB} = \vec{0}$

$$\overline{MA} - 2\overline{MB} = (\overline{MG} + \overline{GA}) - 2(\overline{MG} + \overline{GB})$$

$$\overline{MA} - 2\overline{MB} = -\overline{MG} + (\overline{GA} - 2\overline{GB}) = \overline{GM}$$

يكون الشعاعان \overline{AB} ، $\overline{MA} - 2\overline{MB}$ متعامدين إذا كان:

$$\overline{AB} \cdot \overline{GM} = 0 \quad \text{أي:} \quad \overline{AB} \cdot (\overline{MA} - 2\overline{MB}) = 0$$

إذن: مجموعة النقط (P) هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل النقطة

G وشعاع ناظم له \overline{AB} .

38: (1) إعطاء عبارة بسيطة للشعاع $\overline{V_1}$.

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A, 7), (B, 5), (C, 4)\}$

$$\text{ومنه: } 7\overline{GA} + 5\overline{GB} + 4\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\text{ومنه: } \overline{V_1} = (7+5+4)\overline{MG} \quad \text{أي: } \overline{V_1} = 16\overline{MG}$$

(2) تبين أن الشعاع $\overline{V_2}$ مستقل عن النقطة M.

$$\text{لدينا: } \overline{V_2} = 2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}$$

بما أن: $2 + (-1) + (-1) = 0$ فإن: الشعاع $\overline{V_2}$ مستقل عن النقطة M

$$\text{حيث: } \overline{V_2} = 2\overline{MA} - (\overline{MA} + \overline{AB}) - (\overline{MA} + \overline{AC}) = -\overline{AB} - \overline{AC}$$

حساب $\|\overline{V_2}\|$:

$$\text{لدينا: } \|\overline{V_2}\|^2 = (-\overline{AB} - \overline{AC})^2 = (\overline{AB} + \overline{AC})^2$$

$$\text{ومنه: } \|\overline{V_2}\|^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{أي: } \|\overline{V_2}\|^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{معناه: } \|\overline{V_2}\|^2 = AB^2 + AC^2 - \left[(\overline{BA} + \overline{AC})^2 - BA^2 - AC^2 \right]$$

$$\text{ومنه: } \|\overline{V_2}\|^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 2(16)^2 + 2(20)^2 - (28)^2$$

$$\text{ومنه: } \|\overline{V_2}\|^2 = 528 \quad \text{إذن: } \|\overline{V_2}\| = 4\sqrt{33}$$

(3) تعيين مجموعة النقط M من الفضاء.

$$\text{لدينا: } \|\overline{V_1}\| = \|\overline{V_2}\| \quad \text{ومنه: } 16MG = 4\sqrt{33} \quad \text{أي: } MG = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط سطح كرة

$$\text{مركزها النقطة G وطول نصف قطرها } \frac{\sqrt{33}}{4}.$$

39: (1 أ) التحقق أن A من المجموعة (S_1) .

$$\text{لدينا: } 2AA^2 + BA^2 + CA^2 = 2(0) + (2)^2 + (2)^2 = 8$$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1) .

(ب) تحديد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

نعتبر النقطتين G, D حيث:

G مرجح الجملة $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$

D منتصف الضلع [BC] أي: D مرجح الجملة $\{(B, 1), (C, 1)\}$

ومنه: G مرجح الجملة $\{(A, 2), (D, 2)\}$

إذن: G منتصف الضلع $[AD]$.

بما أن: $2+1+1=4 \neq 0$ فإن: المجموعة (S_1) هي:

المجموعة الخالية أو المجموعة $\{G\}$ أو مجموعة نقط سطح كرة.

حسب نتيجة السؤال (أ).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى (S_1) فإن: المجموعة (S_1) هي مجموعة

نقط سطح كرة مركزها النقطة G وتشمل النقطة A .

2: تعيين المجموعة (S_2) :

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = -2AM^2 + (\overline{BA} + \overline{AM})^2 + (\overline{CA} + \overline{AM})^2$$

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2\overline{AM} \cdot (\overline{BA} + \overline{CA}) + \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$$

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2\overline{AM} \cdot (\overline{BA} + \overline{CA}) + (2)^2 + (2)^2$$

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2\overline{AM} \cdot (\overline{BA} + \overline{CA}) + 8$$

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = -4\overline{AM} \cdot \overline{AD} + 8$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AD} = 0$$

إذن: مجموعة النقط (S_2) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقط

المستوي الذي يشمل A وشعاع ناظم له \overline{AD} .

المعادلات الوسيطة لمستقيم:

40: تبين أن الشعاعين $\overline{u}, \overline{v}$ مرتبطين خطيا

بما أنه: يوجد عدد حقيقي 2 حيث: $\overline{v} = 2\overline{u}$

فإن: الشعاعين $\overline{u}, \overline{v}$ مرتبطان خطيا.

41: تبين أن الأشعة $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ مرتبطة خطيا إذا كان: محدد $0 = (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6(-4) - 2(-8) - 2(-4) = 0$$

إذن: الأشعة $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ مرتبطة خطيا.

42: (1) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان \overline{AM} ، \overline{u} مرتبطين خطيا.

أي: إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overline{AM} = t\overline{u}$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{وبالتالي:} \quad \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 0 = t \\ z - 2 = -t \end{cases}$$

(2) تبين أن النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

الشعاعان $\overline{u}(2, 1, -1)$ ، $\overline{AB}(4, 2, -1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(-1)(1) \neq (-1)(2)$

وهذا يعني أن: النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

طريقة أخرى: بما أن: إحداثيات النقطة B لا تحقق الجملة:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{فإن: النقطة B لا تنتمي إلى } (\Delta).$$

43: تعيين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

$$\overline{AM} = t \overline{u}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 3t \\ y + 1 = 2t \\ z - 2 = t \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \text{معناه:} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = z-2$$

$$\begin{cases} x - 3z + 5 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{3} = z-2 \\ \frac{y+1}{2} = z-2 \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

44: تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

النقطتان $A(-6, 0, 11)$ ، $B(-3, 1, 9)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ) .

ومنه: $\overline{AB}(3, 1, -2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{طريقة أخرى: لدينا:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ومنه:}$$

إذن: مركبات شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هي: $(-3, -1, -2)$.

45: كتابة التمثيل الوسيطى للمستقيم (AB) والقطعة $[AB]$.

تكون النقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي t

$$\overline{AM} = t \overline{AB}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{معناه:} \quad \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 3 = -t \\ z - 2 = 3t \end{cases} \quad \text{أي:}$$

إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (AB) هو:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

التمثيل الوسيطى للقطعة $[AB]$ هو:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{مع: } 0 \leq t \leq 1.$$

46: تعيين إحداثيات النقطة A.

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستوي (OIK) فإن: $y = 0$.

من أجل: $y = 0$ نجد: $1 + t = 0$ أي: $t = -1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع A هي: $(3, 0, 4)$

47: تعيين مجموعة النقط M.

لدينا: $-1 \leq t \leq 3$ ومنه: $0 \leq t \leq 3$ أو $-1 \leq t \leq 0$

ومنه: $0 \leq t^2 \leq 9$ أو $0 \leq t^2 \leq 1$ إذن: $0 \leq t^2 \leq 9$

من أجل: $t^2 = 0$ نجد: $(x, y, z) = (1, 2, 2)$

من أجل: $t^2 = 9$ نجد: $(x, y, z) = (10, -25, 20)$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط القطعة $[AB]$

حيث: $A(1, 2, 2)$ ، $B(10, -25, 20)$

بعد نقطة عن مستقيم

48: (1) تعيين إحداثيات النقطة H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

فإن: H تنتمي إلى المستقيم (Δ) و $\overline{AH} \cdot \overline{u} = 0$

حيث: \overline{u} شعاع توجيه (Δ) .

نفرض إحداثيات H هي: (a, b, c) فيكون:

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{ومنه: } (a-1)(1) + (b)(-1) + (c-1)(1) = 0$$

$$\text{أي: } a - b + c - 2 = 0 \quad (1)$$

النقطة H تنتمي إلى المستقيم (Δ) ومنه:

$$(2) \quad c = -2 + t, \quad b = -t, \quad a = 1 + t$$

$$\text{من (1) و (2) نجد: } (1+t) - (-t) + (-2+t) - 2 = 0$$

$$\text{أي: } t = 1 \quad \text{إذن: إحداثيات H هي: } (a, b, c) = (2, -1, -1)$$

(2) حساب بعد A عن المستقيم (Δ) .

بعد A عن المستقيم (Δ) هو البعد بين النقطتين A و H.

$$\text{لدينا: } AH^2 = (2-1)^2 + (-1-0)^2 + (-1-1)^2 = 6 \quad \text{ومنه: } AH = \sqrt{6}$$

49: (1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

نفرض (x, y, z) إحداثيات M فيكون:

$$f(t) = AM^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$\text{ومنه: } f(t) = (-1+t)^2 + (-1-1)^2 + (t-1)^2$$

$$\text{إذن: } f(t) = 2t^2 - 4t + 6$$

$$\text{الدالة f تقبل الإشتقاق على IR حيث: } f'(t) = 4t - 4$$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		↓	↑

ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي: $f(1) = 4$

(2) استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

$$\text{بعد النقطة A عن المستقيم } (\Delta) \text{ هو: } AH = \sqrt{f(1)} = 2$$

50: (1) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P) .

فإن: شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظم للمستوي (P) .

ومنه: $\vec{u}(1, -1, -1)$ شعاع ناظم للمستوي (P) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$$\text{أي: } x - y - z + 2 = 0$$

حساب بعد النقطة B عن المستوي (P) .

$$\text{بعد النقطة B عن } (P) \text{ هو: } d = \frac{|2 - (-2) - (-1) + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

(2) التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

$$\text{بما أن الجملة: } \begin{cases} 2 = t \\ -2 = -t \\ -1 = 1 - t \end{cases} \text{ تقبل حلا واحدا هو: } t = 2.$$

فإن: النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

نفرض H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) فيكون:

$$AH^2 = AB^2 - d^2 \quad \text{ومنه: } AB^2 = d^2 + AH^2$$

$$\text{لدينا: } AB^2 = 21 \quad \text{و} \quad d^2 = \frac{49}{3} \quad \text{ومنه: } AH^2 = 21 - \frac{49}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\text{إذن: بعد النقطة A عن المستقيم } (\Delta) \text{ هو: } AH = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

51: تحديد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) ، (Δ') .

شعاعا توجيه (Δ) ، (Δ') هما $\vec{u}(1,1,1)$ ، $\vec{v}(1,-1,1)$ على الترتيب.

بما أن: $(1)(1) \neq (-1)(1)$

فإن: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ) ، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases} 1+t'=t \\ 3-t'=t \end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t, t') = (2, 1)$

من أجل: $(t, t') = (2, 1)$ نجد: $(x, y, z) = (2, 2, 3)$

إذن: المستقيمان (Δ) ، (Δ') متقاطعان في النقطة $A(2, 2, 3)$.

52: تبين أن (Δ) ، (Δ') ليسا من نفس المستوي.

شعاعا توجيه (Δ) ، (Δ') هما $\vec{u}(0,1,1)$ ، $\vec{v}(1,2,-1)$ على الترتيب.

بما أن: $(2)(0) \neq (1)(1)$

فإن: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ) ، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases} 3+t'=2 \\ 3-t'=t \end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t, t') = (4, -1)$

من أجل: $t = 4$ نجد: $(x, y, z) = (2, 7, 4)$

من أجل: $t' = -1$ نجد: $(x, y, z) = (2, -1, 4)$

بما أن: $(2, 7, 4) \neq (2, -1, 4)$

فإن: المستقيمين (Δ) ، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

53: إثبات أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') متوازيان ومختلفان.

■ النقطتان $A(0, 2, 7)$ ، $B(3, 3, 5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو: $\vec{AB}(3, 1, -2)$.

■ النقطتان $C(0.75, 2, 1)$ ، $D(-2.25, 1, 3)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ')

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ') هو: $\vec{DC}(3, 1, -2)$.

(1) واضح أن: الشعاعين \vec{AB} ، \vec{DC} مرتبطان خطيا

(2) A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستقيم (Δ')
من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') متوازيان ومختلفان.

54: تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (OIK) .

نفرض $A(x, y, z)$ نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي (OIK) .

فتكون: $x = 0$ ومنه: $0 = 4 - t$ أي: $t = 4$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(0, 6, 9)$

55: تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) .

لدينا: $\vec{u}(1, -3, 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

$\vec{v}(-2, 1, -1)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

لدينا: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 \neq 0$ ومنه: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير متعامدين.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.

لدينا: $-2x + y - z + 4 = 0$ ومنه: $-2(t) + (4 - 3t) - (2 + t) + 4 = 0$

أي: $-6t + 6 = 0$ معناه: $t = 1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(1, 1, 3)$

56: دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) .

لدينا: $2x + y - z + 3 = 0$ ومنه: شعاع ناظم (P) هو $\vec{v}(2, 1, -1)$
لدينا: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ومنه: الشعاع \vec{u} يعامد \vec{v} .

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) لا يقطع المستوي (P) .

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستوي (P)
فإن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (P) .

57: تبين أن المستويين (P) ، (P') متقاطعان.

الشعاعان $\vec{u}(2, 1, -1)$ ، $\vec{v}(1, -3, 2)$ ناظميان للمستويين (P) ، (P') على الترتيب.

بما أن: $(1)(1) \neq (-3)(2)$ فإن: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير مرتبطين خطياً
وهذا يعني أن: المستويين (P) ، (P') متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ)

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - 3y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

معرف بجملته المعادلتين:
تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

ومنه: مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ) هي: $(-1, -5, -7)$

58: تعيين قيمة الوسيط m حيث يكون:

أ) المستويان (P_1) ، (P_2) متوازيين.

الشعاعان $\vec{v}\left(\frac{m+1}{m-2}, \frac{m-2}{3m-2}\right)$ ، $\vec{u}\left(\frac{2}{-1}, \frac{1}{1}\right)$ ناظميان للمستويين (P_1) ، (P_2)

على الترتيب.

يتوازي المستويان (P_1) ، (P_2) إذا كان الشعاعان \vec{u} ، \vec{v} مرتبطين خطياً.

$$\begin{cases} (m+1)(-1) = 2(m-2) \\ (m-2)(1) = (3m-2)(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m-1 = 2m-4 \\ m-2 = -3m+2 \end{cases}$$

معناه: نجد: $m = 1$

ب) المستويان (P_1) ، (P_2) متعامدين.

يتعامد المستويان (P_1) ، (P_2) إذا كان: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(m+1)(2) + (m-2)(-1) + (3m-2)(1) = 0$$

$$4m + 2 = 0 \quad \text{إذن: } m = -0.5$$

59: تعيين مجموعة حلول الجملة.

$$\begin{cases} 4x - 6y - 2z = 10 \\ -4x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$$

بالجمع نجد: $11 = 0$ ومنه: الجملة لا تقبل أي حل.

التفسير الهندسي: المستويان المعرفان بالمعادلتين:

$$2x - 3y - z = 5, \quad -4x + 6y + 2z = 1$$

60: 1) تبين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان.

لدينا: شعاع ناظم (P_1) هو: $\vec{u}_1(1, 3, 1)$

شعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{u}_2(-3, 5, -1)$

بما أن: $(1)(5) \neq (-3)(3)$ فإن: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ) .

تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) معرف بجملته المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 1 = 0 \\ -3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

النقطتان $A(-1.5, 0, 2.5)$ ، $B(2.5, 1, -4.5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overline{AB}(4, 1, -7)$

(2) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3)

شعاع ناظم المستوي (P_3) هو: $\overline{u}_3(-1, 25, 3)$

$$\text{لدينا: } \overline{AB} \cdot \overline{u}_3 = (4)(-1) + (1)(25) + (3)(-7) = 0$$

ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P_3) أو (Δ) محتو في المستوي (P_3) .

بما أن: النقطة $A(-1.5, 0, 2.5)$ تنتمي إلى كل من (P_3) و (Δ) .

فإن: المستقيم (Δ) محتو في المستوي (P_3) .

(3) استنتاج مجموعة حلول الجملة

حسب نتيجتي السؤالين الأول والثاني نستنتج أن الجملة تقبل عددا غير

منته من الحلول وهي إحداثيات نقاط (Δ) تقاطع المستويين (P_1) ، (P_2) .

التفسير الهندسي:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 1 = 0 \\ -3x + 5y - z - 2 = 0 \\ -x + 25y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -3x + 5y - z = 2 \\ -x + 25y + 3z = 9 \end{cases} \quad \text{تكافئ:}$$

بما أن: حلول الجملة هي إحداثيات نقاط المستقيم (Δ) .

فإن: المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) متقاطعة وفق المستقيم (Δ) .

61: 1: كتابة التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث:

$$\overline{AM} = t \overline{u} \quad \text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

2: أ) تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D) .

$$\begin{cases} x = k \\ y = -4k \\ z = 2k \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x = k \\ 4k + y = 0 \\ 2k - z = 0 \end{cases} \quad \text{نضع: } x = k \quad \text{ف نجد:}$$

إذن: مركبات شعاع توجيه المستقيم (D) هي: $(1, -4, 2)$.

ب) تبين أن (D) ، (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

موجها (D) ، (Δ) غير مرتبطين خطيا لأن: $(1)(1) \neq (-2)(4)$

$$\begin{cases} k = 1 - 2t \\ -4k = -1 + t \\ 2k = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{الجملة:} \quad \text{لا تقبل أي حل.}$$

إذن: المستقيمان (D) ، (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) كتابة معادلة للمستوي (P) .

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $\overline{OM} \cdot \overline{u} = 0$

ومنه: معادلة للمستوي (P) $-2x + y + 3z = 0$

ب) إثبات أن المستقيم (D) محتو في المستوي (P) .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (D)

ومنه: $x = k$ ، $y = -4k$ ، $z = 2k$

$$\text{لدينا: } -2(k) + (-4k) + 3(2k) = 0$$

ومنه: النقطة M تنتمي إلى المستوي (P)

إذن: المستقيم (D) محتو في المستوي (P) .

1: تبين أن مركز (S) هو $w(1, 0, 2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

$$\text{ومنه: } (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$$

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $w(1, 0, 2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

$$\text{لدينا: } (0-1)^2 + (-1)^2 + (1-2)^2 = 3$$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

2: تبين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x + y + z = 0$.

بما أن: إحداثيات النقاط B, A, O تحقق المعادلة: $x + y + z = 0$

فإن: معادلة المستوي (OAB) هي: $x + y + z = 0$.

3: إثبات أن (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في A.

نفرض d بعد المركز w عن المستوي (OAB) فيكون:

$$d = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

بما أن: $d = \sqrt{3} = R$ فإن: المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى كل من سطح الكرة (S) والمستوي (OAB) فإن: نقطة التماس هي A.

63: 1: إثبات أن المجموعة (S) سطح كرة.

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

$$\text{ومنه: } (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $w(-1, 1, 0)$ ونصف قطرها $R = 2$.

2: أ) تبين أن (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

بعد المركز w عن المستوي (P_0) هو:

$$d = \frac{|3(-1) - 4(0)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

بما أن: $0.6 < 2$ أي: $d < R$

فإن: المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

طول نصف القطر r للدائرة (C) هو: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$\text{أي: } r = \sqrt{4 - 0.36} = \frac{\sqrt{91}}{5}$$

المركز A للدائرة (C) هو نقطة تقاطع المستقيم (Δ) الذي يشمل

المركز w لسطح الكرة (S) ويعامد المستوي (P_0) .

المعادلات الوسيطة للمستقيم (Δ) هي:

$$\text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

ومنه: إحداثيات المركز A هي حلول الجملة:

$$\text{نجد: } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = t \\ 3x - 4z = 0 \end{cases} \quad \text{نجد: } 4t = -3 + 3t \quad \text{ومنه: } t = -3$$

إذن: إحداثيات المركز A هي: $(-4, 1, -3)$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S).

بعد المركز w لسطح الكرة (S) عن المستوي (P_m) هو:

$$d = \frac{|3(-1) - 4(0) + m|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|m-3|}{5}$$

لندرس إشارة الفرق: $d - R = \frac{|m-3|}{5} - 2$

المعادلة: $\frac{|m-3|}{5} - 2 = 0$ تكافئ: $|m-3| = 10$

ومنه: $m-3 = -10$ أو $m-3 = 10$

إذن: $m = -7$ أو $m = 13$

m	$-\infty$	-7	13	$+\infty$
d - R		+	0	-

من هذا الجدول نستنتج أنه إذا كان:

$-7 < m < 13$: المستوي (P_m) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة.

$m \in \{-7, 13\}$: المستوي (P_m) مماس لسطح الكرة (S).

$m > 13$ أو $m < -7$: المستوي (P_m) لا يقطع سطح الكرة (S).

تمارين ومسائل متنوعة:

64: 1) أ) إثبات أن: A, B, C ليست في استقامية.

لدينا: $\overline{AB}(0, 1, 2)$ ، $\overline{AC}(-2, 1, -1)$

بما أن: $(1)(2) \neq (-1)(-1)$

فإن: الشعاعين \overline{AB} ، \overline{AC} غير مرتبطين خطياً.

معناه: النقاط A, B, C ليست في استقامية.

ب) التحقق أن \vec{n} ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$

فإن: الشعاع \vec{n} عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} ، \overline{AC}

إذن: الشعاع \vec{n} ناظم للمستوي (ABC).

ج) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$

أي: $3(x-1) + 4(y) - 2(z-2) = 0$

معناه: $3x + 4y - 2z + 1 = 0$

2: أ) تبين أن (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

معادلة (P_1) هي: $2x + y + 2z + 1 = 0$

ومنه: الشعاع $\vec{n}_1(2, 1, 2)$ ناظم للمستوي (P_1) .

معادلة (P_2) هي: $x - 2y + 6z = 0$

ومنه: الشعاع $\vec{n}_2(1, -2, 6)$ ناظم للمستوي (P_2) .

بما أن: $(1)(6) \neq (-2)(2)$ فإن: \vec{n}_1 ، \vec{n}_2 غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

ب) كتابة التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

نضع: $z = t$ فنجد:

$$\begin{cases} x = -0.4 - 2t \\ y = -0.2 + 2t \\ z = t \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 2x + y = -2t - 1 \\ x - 2y = -6t \end{cases}$$

ج) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC).

الشعاع $\vec{u}(-2, 2, 1)$ موجه للمستقيم (Δ) .

بما أن: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ فإن: الشعاعين \vec{n} ، \vec{u} متعامدان.

إذن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (ABC).

3: أ) التحقق من وجود النقطة G .

لدينا: $1+2+t=3+t \neq 0$ ومنه: النقطة G موجودة.

ب) تعيين احداثيات النقطة I .

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

بما أن: $1+2=3 \neq 0$ فإن: I مرجح للجملة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

ومنه: احداثيات النقطة I هي: $\left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$

ج) كتابة الشعاع \overrightarrow{IG} بدلالة الشعاع \overrightarrow{IC} .

لدينا: G مرجح للجملة $\{(A, 1), (B, 2), (C, t)\}$

ومنه: G مرجح للجملة $\{(I, 3), (C, t)\}$

معناه: $3\overrightarrow{GI} + t(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$ أي: $3\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

نجد: $(3+t)\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ إذن: $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$

د) إثبات أن مجموعة النقط G هي مجموعة نقاط $[IC]$ ما عدا C .

نضع: $f(t) = \frac{t}{3+t}$ مع: $t \geq 0$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ حيث: $f'(t) = \frac{3}{(3+t)^2}$

جدول التغيرات:

t	$()$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$()$	1

بما أن: $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$ و $0 \leq \frac{t}{3+t} < 1$

فإن: مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $[0, +\infty[$ هي

مجموعة نقاط القطعة $[IC]$ ما عدا النقطة C .

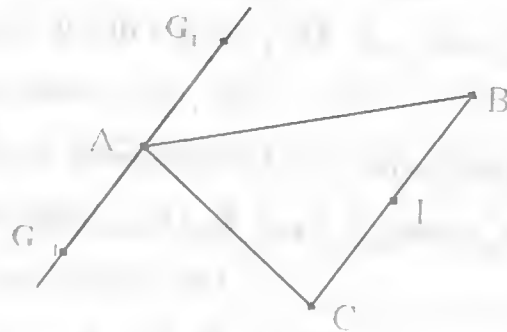
هـ) تحديد قيمة العدد t .

تكون النقطة G منتصف $[IC]$ إذا كان: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

بالمطابقة مع العلاقة: $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$

نجد: $\frac{t}{3+t} = \frac{1}{2}$ ومنه: $t = 3$.

65: 1: أ) تمثيل النقاط A, B, C, I .



ب) تبين أن $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{CI}$.

لدينا: G_1 مرجح للجملة: $\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

أي: $2\overrightarrow{G_1A} + (\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

معناه: $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

وبالتالي: $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ إذن: $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI}$.

لدينا أيضا: G_{-1} مرجح الجملة: $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$

$$\text{ومنه: } 2\overline{G_{-1}A} - \overline{G_{-1}B} + \overline{G_{-1}C} = \overline{0}$$

$$\text{بنفس الطريقة نجد: } \overline{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BI}$$

(ج) استنتاج أن A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

$$\text{لدينا: } \overline{AG_{-1}} = \overline{BI}, \quad \overline{AG_1} = \overline{CI}$$

$$\text{بالجمع نجد: } \overline{AG_1} + \overline{AG_{-1}} = \overline{CI} + \overline{BI} = \overline{0}$$

وهذا يعني أن: A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

$$\text{استنتاج أن: } \overline{G_1G_{-1}} = \overline{BC}$$

$$\text{من العلاقتين: } \overline{AG_{-1}} = \overline{BI}, \quad \overline{AG_1} = \overline{CI}$$

$$\overline{AG_{-1}} - \overline{AG_1} = \overline{BI} - \overline{CI}$$

$$\text{معناه: } \overline{AG_{-1}} + \overline{G_1A} = \overline{BI} + \overline{IC} \quad \text{إذن: } \overline{G_1G_{-1}} = \overline{BC}$$

انشاء النقطتين G_{-1}, G_1 .

$$\text{لدينا: } A \text{ منتصف } [G_1G_{-1}] \text{ و } \overline{G_1G_{-1}} = \overline{BC}$$

ومنه: النقطتان G_{-1}, G_1 تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة A

ويوازي المستقيم (BC) .

$$2: \text{ أ) نبين أن } \overline{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overline{BC}$$

$$\text{لدينا: } (k^2+1)\overline{G_kA} + k\overline{G_kB} - k\overline{G_kC} = \overline{0} \text{ ومنه:}$$

$$(k^2+1)\overline{G_kA} + k(\overline{G_kA} + \overline{AB}) - k(\overline{G_kA} + \overline{AC}) = \overline{0}$$

$$\text{معناه: } (k^2+1)\overline{G_kA} + k(\overline{AB} + \overline{CA}) = \overline{0}$$

$$\text{إذن: } \overline{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overline{BC}$$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

الدالة f حيث: $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$ تقبل الاشتقاق على المجال $[-1, 1]$

$$\text{حيث: } f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-1	1
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	0.5	-0.5

(ج) استنتاج مجموعة النقط G_k .

$$\text{لدينا: } \overline{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overline{BC} \text{ و } -0.5 \leq \frac{-k}{k^2+1} \leq 0.5$$

ومنه: مجموعة النقط G_k هي مجموعة نقاط القطعة $[G_1G_{-1}]$.

3: تعيين مجموعة النقط M .

$$\text{لدينا: } 2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MG_{-1}} \text{ و } 2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = 2\overline{MG_1}$$

$$\text{ومنه: } \|2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\|$$

$$\text{تكافئ: } 2\overline{MG_1} = 2\overline{MG_{-1}} \text{ أي: } \overline{MG_1} = \overline{MG_{-1}}$$

إذن: مجموعة النقط M هي مجموعة نقط المستوي المحوري للقطعة

$[G_1G_{-1}]$ أي: المستوي الذي يشمل النقطة A ويعامد (BC) .

1) التحقق أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

$$\overline{AB}(1, 2, -1), \overline{CB}(4, 4, -2)$$

بما أن: $(1)(4) \neq (2)(4)$ فإن: $\overline{AB}, \overline{CB}$ غير مرتبطين خطيا.وهذا يعني أن: النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.تبين أن معادلة (ABC) هي: $y + 2z - 2 = 0$.بما أن: إحداثيات النقاط A, B, C تحقق المعادلة: $y + 2z - 2 = 0$ فإن: معادلة المستوي (ABC) هي $y + 2z - 2 = 0$.2) أ: التحقق أن المستويين $(P), (ABC)$ متعامدان.الشعاعان $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(0, 1, 2)$ ناظميان للمستويين $(P), (ABC)$ على الترتيب.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0)(1) + (1)(2) + (2)(-1) = 0$$

ومنه: \vec{u}, \vec{v} متعامدان.إذن: المستويان $(P), (ABC)$ متعامدان.تعيين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) :المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

النقطتان: $D(-6, 0, 1), C(-1, -2, 2)$ تنتميان إلى (Δ) .ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overline{DC}(5, -2, 1)$.تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

$$\overline{CM} = t\vec{u}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x + 1 = 5t \\ y + 2 = -2t \\ z - 2 = t \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

طريقة اخرى:

$$\text{لدينا:} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{بوضع } z = t \text{ نجد:}$$

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{معناه:} \quad \begin{cases} x + 2y - t + 7 = 0 \\ y + 2t - 2 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

ب) حساب بعد النقطة A عن (Δ) .بما أن: المستويين (P) و (ABC) متعامدان و $(ABC) \cap (P) = (\Delta)$ فإن: بعد A عن (Δ) يساوي بعد A عن المستوي (P) .

$$d = \frac{|2 + 2(0) - 1 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{أي:}$$

3) تعيين قيمة العدد α :

$$\overline{GA} + \alpha \overline{GB} + \beta \overline{GC} = \vec{0} \quad \text{لدينا:}$$

نفرض (x, y, z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$$x = \frac{2 + 3\alpha - \beta}{1 + \alpha + \beta}, \quad y = \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta}, \quad z = \frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha + \beta}$$

تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) إذا حققت إحداثياتها معادلة المستوي (P) لأن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P) .

$$\text{ومنه:} \quad \frac{2 + 3\alpha - \beta}{1 + \alpha + \beta} + \frac{4\alpha - 4\beta}{1 + \alpha + \beta} - \frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha + \beta} + 7 = 0$$

نضرب الطرفين في العدد: $1 + \alpha + \beta$ فنجد:

$$2 + 3\alpha - \beta + 4\alpha - 4\beta - (1 + 2\beta) + 7(1 + \alpha + \beta) = 0$$

$$\text{أي:} \quad 14\alpha + 8 = 0 \quad \text{إذن:} \quad \alpha = -\frac{4}{7}$$

1: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $CM^2 = AC^2$

$$AC^2 = (1-0)^2 + (0-2)^2 + (-1-1)^2 = 9$$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

2: أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه المستقيم (Δ) أي: $\vec{u}(-1, 2, 2)$.تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = 0$

$$أي: (-1)(x-1) + 2(y) + 2(z+1) = 0$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-x + 2y + 2z + 3 = 0$ ب) حساب بعد النقطة C عن (Δ) .نفرض H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ) فيكون:

$$\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{و} \quad H \in (\Delta)$$

$$أي: -(-1-t) + 2(1+2t) + 2(-3+2t) + 3 = 0$$

ومنه: $t = 0$ إذن: إحداثيات H هي: $(-1, 1, -3)$

$$لدينا: CH^2 = (-1-1)^2 + (1-0)^2 + (-3+1)^2 = 9$$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $CH = 3$ ج) استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والكرة (S).المستقيم (Δ) مماس لسطح الكرة (S) لأن بعد مركزها C عن المستقيم (Δ) يساوي طول نصف قطرها.

1) إثبات أن النقاط A, B, C تعين مستويا.

تعين النقاط A, B, C مستويا إذا كانت ليست على استقامة واحدة أي:

إذا كان الشعاعان \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا.

$$لدينا: \overrightarrow{AB}(2, 0, -1), \quad \overrightarrow{AC}(0, 1, 1)$$

$$\text{بما أن: } (0)(1) \neq (-1)(1)$$

فإن: الشعاعين \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا

إذن: النقاط A, B, C تعين مستويا.

إعطاء معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عدنان

$$\text{حقيقيان } \alpha, \beta \text{ بحيث: } \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

أي إذا كان: محدد $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ معدوما

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ومنه: } (1)(x-1) - (y-2)(2) + (z-2)(2) = 0$$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $x - 2y + 2z - 1 = 0$ 2) إثبات أن المستويين (P_1) , (P_2) متقاطعان.شعاع ناظم المستوي (P_1) هو: $\vec{u}_1(1, -2, 2)$ وشعاع ناظم المستوي (P_2) هو: $\vec{u}_2(1, -3, 2)$ بما أن: $(1)(-3) \neq (-2)(1)$ فإن: الشعاعين \vec{u}_2 , \vec{u}_1 غير مرتبطين خطيا.وهذا يعني أن: المستويين (P_1) , (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .3) تبين أن النقطة C تنتمي إلى (Δ) .بما أن: إحداثيات النقطة C تحقق معادلتين المستويين (P_1) , (P_2) فإن: النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

4) تبين أن \vec{u} شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

يكون الشعاع \vec{u} شعاع توجيه للمستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاع \vec{u} عمودياً على كل من الشعاعين \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0 \text{ و } \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0$$

ومنه: \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

إذن: $(-1, 0, 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

5) استنتاج التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\vec{CM} = t\vec{u}$ أي:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{معناه:} \quad \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 3 = 0 \\ z - 3 = -t \end{cases}$$

6) إيجاد قيمة الوسيط t :

يتعامد الشعاعان \vec{AM} ، \vec{u} إذا كان: $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

أي: $(2)(2t) + (0)(1) + (-1)(1 - t) = 0$ إذن: $t = 0.2$.

استنتاج المسافة بين A و (Δ) :

من أجل: $t = 0.2$ نجد: $(x, y, z) = (1.4, 3, 2.8)$ وهي إحداثيات

النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

ومنه: بعد النقطة A عن (Δ) هو الطول AH حيث:

$$AH = \sqrt{(1.4 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (2.8 - 2)^2} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{1.6}$$

69: 1: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

أي: $-2(x - 1) + (y + 2) + 5(z - 1) = 0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2x + y + 5z - 1 = 0$

2: تبين أن المستويين (P) ، (P') متعامدان.

الشعاع $\vec{u}'(1, 2, 0)$ ناظم للمستوي (P') .

لدينا: $\vec{u} \cdot \vec{u}' = (1)(-2) + (2)(1) + (0)(5) = 0$ ومنه: \vec{u}, \vec{u}' متعامدان.

إذن: المستوي (P) يعامد المستوي (P') .

3: تبين أن النقطة B تنتمي إلى (Δ) .

بما أن: النقطة B تنتمي إلى كل من المستويين (P) ، (P') فإنها تنتمي

إلى المستقيم (Δ) .

وبما أن: الشعاع \vec{v} عمودي على كل من الشعاعين \vec{u}, \vec{u}' فإن:

الشعاع $\vec{v}(2, -1, 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

4: حساب بعد النقطة C عن كل من (P) ، (P') .

$$d_1 = \frac{|-2(5) + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (5)^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d_2 = \frac{|5 + 2(-2) - 7|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

استنتاج بعد النقطة C عن (Δ) :

لتكن: H_1 المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

H_2 المسقط العمودي للنقطة H_1 على المستقيم (Δ) .

المثلث CH_1H_2 قائم في H_1 ومنه: $CH_2^2 = CH_1^2 + H_1H_2^2$

$$\text{لدينا: } CH_1^2 = \left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 = 10.8, \quad H_1H_2^2 = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 7.2$$

ومنه: $CH_2^2 = 18$ إذن: $CH_2 = 3\sqrt{2}$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $3\sqrt{2}$.

5: أ) التحقق أن M تنتمي إلى (Δ).

لدينا: $\vec{v}(2, -1, 1)$ و $\overline{BM}(2+2t, -t-1, t+1)$

بما أن: الشعاعين \vec{v} ، \overline{BM} مرتبطان خطياً وذلك لأن:

$$(-1)(1+t) = (1)(-t-1) \quad \text{و} \quad (2)(-t-1) = (-1)(2+2t)$$

فإن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب: تبين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى.

$$\text{لدينا: } f(t) = CM^2$$

$$\text{ومنه: } f(t) = (1+2t-5)^2 + (3-t+2)^2 + (t+1)^2$$

$$\text{بعد النشر والتبسيط نجد: } f(t) = 6t^2 - 24t + 42$$

$$\text{الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ حيث: } f'(t) = 12t - 24$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:

t	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)		18	

ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي $f(2) = 18$.

استنتاج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

$$\text{بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: } CM = \sqrt{f(2)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

70: 1: أ) إثبات أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

$$\text{لدينا: } \overline{AB}(0, 1, 1), \quad \overline{AC}(2, -2, 2)$$

$$\text{بما أن: } (0)(2) \neq (1)(-2)$$

فإن: الشعاعين \overline{AB} ، \overline{AC} غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

ب) تبين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x + y - z - 3 = 0$

بما أن: إحداثيات النقاط A، B، C تحقق المعادلة: $2x + y - z - 3 = 0$

فإن: معادلة المستوي (ABC) هي: $2x + y - z - 3 = 0$

2: إثبات أن المستويين (P)، (P') متقاطعان.

شعاع ناظم للمستوي (P) هو $\vec{u}(1, 2, -1)$.

وشعاع ناظم للمستوي (P') هو $\vec{v}(2, 3, -2)$.

بما أن: $(2)(2) \neq (1)(3)$ فإن: الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: المستويين (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) معرف

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{بجملة المعادلتين التاليتين:}$$

$$\begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ 2(-2y + z + 4) + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} x = -2 + z \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{وبالتالي:} \quad \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ -y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

نضع: $z = t$ فنحصل على التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ):

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{مع: } t \text{ عدد حقيقي.}$$

3: تحديد تقاطع المستويات (ABC)، (P)، (P'):

لدينا: حسب نتيجة السؤال الثاني المستويان (P)، (P') متقاطعان وفق

المستقيم (Δ) الذي شعاع توجيه له $\vec{w}(1, 0, 1)$.

لدينا أيضاً: $\vec{m}(2, 1, -1)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{w} \cdot \vec{m} = 1 \neq 0$ فإن: الشعاعين \vec{m} ، \vec{w} غير متعامدين

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ولتكن

D إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة:

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان α, β بحيث: $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y+3 & 3 & 4 \\ z+1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

معناه: $(x-2)(0) - (y+3)(2) + (z+1)(2) = 0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $-y + z - 2 = 0$

3: أ) تبين أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $\Delta = (-2\theta)^2 + (-2\sin\theta)^2 + (2)^2 - 4(\theta^2 - \cos^2\theta)$

ومنه: $\Delta = 4\theta^2 + 4\sin^2\theta + 4 - 4\theta^2 + 4\cos^2\theta$

أي: $\Delta = 4 + 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 4 + 4(1) = 8$

بما أن: $\Delta > 0$ فإن: (S) سطح كرة مركزها $w(\theta, \sin\theta, -1)$

وطول نصف قطرها $R = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{2}$

ب) دراسة حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) و (S).

بعد المركز w عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d = \frac{|-(\sin\theta) + (-1) - 2|}{\sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|3 + \sin\theta|}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sin\theta}{\sqrt{2}}$$

لندرس إشارة الفرق $d - R$:

$$d - R = \frac{3 + \sin\theta}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1 + \sin\theta}{\sqrt{2}}$$

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	π
$d - R$	+	()	+

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} x = -2 + 4 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ t = 4 \end{cases} \quad \text{نجد:}$$

إذن: المستويات (ABC), (P), (P') تتقاطع في النقطة $D(2, 3, 4)$

4: حساب بعد النقطة A عن (Δ) .

لتكن $H(x, y, z)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

ومنه: $H \in (\Delta)$ و $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{w} = 0$

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{معناه:} \quad H \in (\Delta)$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \quad \text{معناه:} \quad (-3+t)(1) + (0)(3-1) + (1)(t-0) = 0$$

$$\text{معناه:} \quad 2t - 3 = 0 \quad \text{ومنه:} \quad t = 1.5$$

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $(-0.5, 3, 1.5)$

ومنه: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو AH حيث:

$$AH = \sqrt{(1+0.5)^2 + (1-3)^2 + (0-1.5)^2} = \sqrt{8.5}$$

71: 1: تبين أن النقاط A, B, C تعين مستويًا.

$$\text{لدينا:} \quad \overrightarrow{AB}(-1, 3, 3), \quad \overrightarrow{AC}(-2, 4, 4)$$

بما أن: $(-1)(4) \neq (3)(-2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطتين خطياً.

معناه: النقاط A, B, C تعين مستويًا.

من هذا الجدول نستنتج أنه:

إذا كان: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 1.

معناه: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

إذا كان: $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ أو $-\pi \leq \theta < -\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 0.

(ج) تعيين إحداثيات نقطة التماس H.

من أجل: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ نجد: $w\left(-\frac{\pi}{2}, -1, -1\right)$

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة w والعمودي على (ABC)

ومنه: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(0, -1, 1)$

إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ مع } t \text{ عدد حقيقي.}$$

ومنه إحداثيات نقطة التماس H هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \\ -(-1 - t) + (-1 + t) - 2 = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \\ -y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ y = -2 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \text{ ومعناه: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \\ 2t - 2 = 0 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

إذن: إحداثيات نقطة التماس H هي $\left(-\frac{\pi}{2}, -2, 0\right)$

72: (1) برهان أن المثلث ABC قائم في A.

لدينا: $\vec{AC}(3, 0, -3)$ ، $\vec{AB}(3, 3, 3)$

ومنه: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ إذن: المثلث ABC قائم في A.

(2) تبين أن المستقيم (AD) عمودي على (ABC).

لدينا: $\vec{AD}(-3, 6, -3)$ ومنه: $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$ و $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0$

وهذا يعني أن: المستقيم (AD) عمودي على كل من (AB) و (AC).

إذن: المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

(3) حساب الحجم V لرباعي الوجوه ABCD.

حجم رباعي الوجوه ABCD يعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{3} \times S \times AD \quad \text{حيث: } S \text{ مساحة المثلث } ABC.$$

لدينا: $\vec{AD}(-3, 6, -3)$ ، $\vec{AC}(3, 0, -3)$ ، $\vec{AB}(3, 3, 3)$

ومنه: $AD = 3\sqrt{6}$ ، $AC = 3\sqrt{2}$ ، $AB = 3\sqrt{3}$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27$$

(4) تعيين قياساً للزاوية (\vec{DB}, \vec{DC}) .

نفرض θ قياساً للزاوية (\vec{DB}, \vec{DC}) فيكون:

$$\vec{DB} \cdot \vec{DC} = DB \times DC \times \cos \theta$$

لدينا: $\vec{DC}(6, -6, 0)$ ، $\vec{DB}(6, -3, 6)$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أي: } 54 = 9 \times 6 \sqrt{2} \cos \theta$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{4}$$

(5) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (P) فإن: شعاع ناظم

المستوي (P) هو: $\vec{AC}(3, 0, -3)$

تكون نقطة M(x, y, z) من المستوي إذا كان: $\vec{AM} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\text{أي: } (x-3)(3) + (y+2)(0) + (z-2)(-3) = 0 \text{ نجد: } x - z - 1 = 0$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x - z - 1 = 0$

6) برهان أن المستوي (P') عمودي على (AB) .

إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المستوي (P') (1)

شعاع ناظم المستوي (P') هو: $\vec{u}(1, 1, 1)$ ومنه: $\vec{AB} = 3\vec{u}$

ومنه: \vec{AB} ، \vec{u} مرتبطان خطياً (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P') في النقطة A.

7) تعيين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \text{ نضع } z=t \text{ فنجد:}$$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x-t-1=0 \\ x+y+t-3=0 \\ z=y \end{cases}$$

73: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1: تبين أن \vec{AC} ، \vec{AB} متعامدان.

لدينا: $\vec{AB}(-2, 0, -2)$ ، $\vec{AC}(1, -4, -1)$ ومنه: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

وهذا يعني أن: الشعاعين \vec{AB} ، \vec{AC} متعامدان.

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عدنان حقيقيان α ، β بحيث: $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ y-2 & 0 & -4 \\ z-6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه: $(x-3)(-8) - (y-2)(4) + (z-6)(8) = 0$

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x + y - 2z + 4 = 0$

3: تعيين إحداثيات النقطة H.

نفرض (a, b, c) إحداثيات H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) فإن:

$H \in (ABC)$ و \vec{OH} ، $\vec{u}(2, 1, -1)$ مرتبطان خطياً.

$$(1) \quad 2a + b - c + 4 = 0 \text{ ومنه: } H \in (ABC)$$

\vec{OH} ، $\vec{u}(2, 1, -1)$ مرتبطان خطياً ومنه:

$$(2) \quad c = -2b \text{ و } a = 2b$$

من (1) و (2) نجد: $2(2b) + b - (-2b) + 4 = 0$ أي: $b = -\frac{4}{9}$

وبالتالي: $a = -\frac{8}{9}$ ، $c = \frac{8}{9}$

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9})$

حساب حجم رباعي الوجوه OABC.

حجم رباعي الوجوه OABC هو V حيث:

$$V = \frac{1}{3} \times S \times OH \text{ حيث: } S \text{ مساحة المثلث } ABC.$$

$$\text{لدينا: } OH = \frac{4}{3} \text{ ومنه: } OH^2 = \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{144}{81}$$

$$\text{نعلم أن: } S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \text{ ومنه: } S = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 6$$

$$\text{إذن: حجم رباعي الوجوه OABC هو: } V = \frac{1}{3} (6) \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

4: أ) تبين أن تقاطع (S) و (ABC) هو دائرة (C).

طول نصف قطر سطح الكرة (S) هو: $R = OA = 7$

بعد النقطة O عن المستوي (ABC) هو: $OH = \frac{4}{3}$

بما أن: $OH < R$ فإن: المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في

دائرة (C) مركزها المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

أي: النقطة H.

(ب) حساب طول نصف قطر الدائرة (C).

طول نصف قطر الدائرة (C) هو r حيث:

$$r^2 = R^2 - OH^2 = \frac{425}{9} \quad \text{أي:} \quad r = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

5: أ) حساب إحداثيات النقطة G.

بما أن: G مرجح الجملة: $\{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

$$\text{فإن: } 3\overline{GO} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$$

$$\text{معناه: } 6\overline{GO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0} \quad \text{أي:} \quad \overline{OG} = \frac{1}{6}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

نفرض (x, y, z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$$z = \frac{6+4+5}{6} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{2+2-2}{6} = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{3+1+4}{6} = \frac{4}{3}$$

■ بعد النقطة G عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d = \frac{\left| 2\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3} - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4 \right|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

(ب) تبين أن (S') سطح كرة:

$$\text{لدينا: } 3\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 6\overline{MG} + (3\overline{GO} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})$$

$$\text{ومنه: } 3\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 6\overline{MG}$$

$$\text{المعادلة: } \|3\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 4$$

$$\text{تكافئ: } 6MG = 4 \quad \text{أي:} \quad MG = \frac{2}{3}$$

إذن: المجموعة (S') سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \frac{2}{3}$.

(ج) استنتاج أن (ABC) مماس لسطح الكرة (S') .

بما أن: $d = \frac{2}{3} = R$ فإن: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S') .

74: 1) برهان أن $(P_1), (P_2)$ متعامدان.

شعاع ناظم (P_1) هو $\vec{u}(0, 2, 1)$ وشعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{v}(0, 1, -2)$

بما أن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن: المستويين $(P_1), (P_2)$ متعامدان.

(2) تبين أن $(P_1), (P_2)$ متقاطعان وفق المستقيم (AB).

بما أن: إحداثيات النقطتين A, B تحققان معادلتَي المستويين $(P_1), (P_2)$

فإنهما تنتميان إلى كل من المستويين $(P_1), (P_2)$

إذن: تقاطع المستويين $(P_1), (P_2)$ هو المستقيم (AB).

(3) تعيين إحداثيات النقطتين C, D.

نفرض: (x, y, z) إحداثيات النقطة C.

بما أن: النقطة C تنتمي إلى المحور (O; J) فإن: $x = z = 0$

وبما أن: النقطة C تنتمي إلى المستوي (P_1) فإن: $2y + 0 - 6 = 0$

أي: $y = 3$ إذن: إحداثيات النقطة C هي: $(0, 3, 0)$

وبنفس الطريقة نجد إحداثيات النقطة D هي: $(0, -12, 0)$

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_3) .

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (P_3) إذا كان: $\overline{CM} \cdot \overline{AD} = 0$

$$\text{لدينا: } \overline{AD}(-3, -12, -6), \quad \overline{CM}(x, y-3, z)$$

ومنه: المعادلة الديكارتية للمستوي (P_3) هي: $x + 4y + 2z - 12 = 0$

(5) كتابة التمثيل الوسيطى للمستقيم (OA).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (OA) إذا وجد عدد حقيقي t

$$\text{حيث: } \overline{OM} = t \overline{OA} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}$$

تعيين إحداثيات النقطة E :

نفرض: (x, y, z) إحداثيات النقطة E فيكون:

$$3t + 4(0) + 2(6t) - 12 = 0 \quad \text{ومنه: } t = 0.8$$

إذن: إحداثيات النقطة E هي: $(2.4, 0, 4.8)$.

(6) تحديد علاقة النقطة E بالمثلث ACD.

الشعاان \overline{AE} ، \overline{CD} متعامدان ومنه: E تنتمي إلى العمود المتعلق

بالضلع $[CD]$ في المثلث ACD (1)

النقطتان E، C تنتميان إلى المستوي (P_3) الذي شعاع ناظمه \overline{AD}

ومنه: الشعاعان \overline{EC} ، \overline{AD} متعامدان وبالتالي: E تنتمي إلى العمود

المتعلق بالضلع $[AD]$ في المثلث ACD (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: E هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث ACD.

75: 1: حساب $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

لدينا: $\overline{AB}(0, 2, 0)$ ، $\overline{BC}(0, 0, -6)$ ومنه: $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$

وبالتالي: \overline{AB} ، \overline{BC} متعامدان إذن: المثلث ABC قائم في B.

2: تبين أن الشعاع \overline{AD} ناظم للمستوي (ABC).

لدينا: $\overline{AD}(18, 0, 0)$ ومنه: $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$

ومنه: \overline{AD} عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} ، \overline{BC} .

إذن: الشعاع \overline{AD} ناظم للمستوي (ABC).

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا كان:

$$\overline{AM} \cdot \overline{AD} = 0 \quad \text{أي: } x - 1 = 0$$

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x - 1 = 0$.

3: تبين أن \overline{CE} ، \overline{AB} غير مرتبطين خطياً.

لدينا: $\overline{AB}(0, 2, 0)$ ، $\overline{CE}(18, 0, 6)$

بما أن: $(0)(0) \neq (2)(6)$ فإن: \overline{AB} ، \overline{CE} غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

4: تعيين إحداثيات النقطة G.

حسب نتيجة السؤال الأول لدينا \overline{AB} ، \overline{BC} متعامدان وبالتالي:

يكون الرباعي ABCG مستطيلاً إذا كان: $\overline{AG} = \overline{BC}$

نفرض (x, y, z) إحداثيات G فنجد:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z - 3 = -6 \end{cases}$$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(1, -1, -3)$.

5: التحقق أن النقاط D، E، F ليست في استقامة.

لدينا: $\overline{DE}(0, 2, 0)$ ، $\overline{DF}(0, 2, -6)$

بما أن: $(2)(0) \neq (-6)(2)$ فإن: \overline{DE} ، \overline{DF} غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: النقاط D، E، F ليست في استقامة.

6: دراسة الوضع النسبي للمستويين (ABC)، (DEF).

لدينا: $\overline{AD} \cdot \overline{DE} = 0$ و $\overline{AD} \cdot \overline{DF} = 0$

ومنه: الشعاع \overline{AD} عمودي على كل من الشعاعين \overline{DE} ، \overline{DF} .

ومنه: الشعاع \overline{AD} ناظم للمستوي (DEF) (1)

حسب نتيجة السؤال الثاني لدينا:

الشعاع \overline{AD} ناظم للمستوي (ABC) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: المستويين (ABC)، (DEF) متوازيان

ومختلفان أو منطبقان.

حسب نتيجة السؤال الثالث النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC) وتنتمي إلى المستوي (DEF).

إذن: المستويان (ABC)، (DEF) متوازيان ومختلفان.

7: أ) حساب الأطوال a, b, c .

$$\text{لدينا: } \overline{AB}(0, 2, 0), \overline{BC}(0, 0, -6), \overline{AD}(18, 0, 0)$$

$$\text{ومنه: } AB = 2, BC = 6, AD = 18$$

$$\text{وبالتالي: } (a, b, c) = (2, 6, 18)$$

ب) تبين أن المتتالية (a, b, c) هندسية

$$\text{بما أن: } b^2 = 36 = ac \text{ فإن: المتتالية } (a, b, c) = (2, 6, 18)$$

$$\text{هندسية أساسها: } q = \frac{b}{a} = 3$$

76: 1: تبين أن النقاط A, B, C تعين مستويًا.

$$\text{لدينا: } \overline{AB}(-1, -1, 1), \overline{AC}(-2, -5, -1)$$

$$\text{بما أن: } (-1)(-1) \neq (-5)(-1) \text{ فإن: } \overline{AB}, \overline{AC} \text{ غير مرتبطين خطياً.}$$

معناه: النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

إذن: النقاط A, B, C تعين مستويًا.

2: إيجاد إحداثيات النقطة G.

$$\text{بما أن: } G \text{ مركز ثقل المثلث } ABC \text{ فإن: } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$$

$$\text{أي: } 3\overline{GO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$$

$$\text{معناه: } \overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \text{ ومنه:}$$

$$z_G = \frac{3+4+2}{3} = 3, \quad y_G = \frac{2+1-3}{3} = 0, \quad x_G = \frac{1+0-1}{3} = 0$$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(0, 0, 3)$

$$3: \text{ أ) التحقق أن } \vec{u}(2, -1, 1) \text{ عمودي على كل من } \overline{AB}, \overline{AC}.$$

$$\text{بما أن: } \overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \text{ و } \overline{AC} \cdot \vec{u} = 0$$

فإن: الشعاع \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين $\overline{AB}, \overline{AC}$.

ب) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (ABC).

حسب نتيجة السؤال الثالث فرع (أ) فإن: \vec{u} ناظم للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا كان: $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$$\text{أي: } 2x - y + z - 3 = 0$$

4: تبين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

لدينا: $\vec{v}(-2, 1, -1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$$\vec{u}(2, -1, 1) \text{ شعاع ناظم للمستوي (ABC).}$$

واضح أن: $\vec{u} = -\vec{v}$ ومنه: \vec{u}, \vec{v} مرتبطان خطياً.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5: إثبات أن G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

بما أن: إحداثيات النقطة G تحقق معادلة المستوي (ABC)

$$(1) \quad \text{فإن: } G \text{ تنتمي إلى المستوي (ABC)}$$

$$\text{لدينا: } \overline{DG}(-4, 2, -2), \vec{u}(2, -1, 1) \text{ ومنه: } \overline{DG} = -2\vec{u}$$

$$(2) \quad \text{معناه: } \vec{u} \text{ و } \overline{DG} \text{ مرتبطان خطياً}$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

77: 1) كتابة معادلة لسطح الكرة (S)

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $BM^2 = AB^2$

$$\text{لدينا: } \overline{AB}(-12, 6, 0), \overline{BM}(x+6, y, z-6)$$

$$\text{ومنه: معادلة سطح الكرة (S) هي: } (x+6)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 180$$

2) كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

فإن: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء

$$\text{حيث: } \overline{AM} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$\text{أي: } -12(x-6) + 6(y+6) + (0)(z-6) = 0$$

$$\text{معناه: } -2x + y + 18 = 0$$

$$\text{إذن: معادلة المستوى (P) هي: } -2x + y + 18 = 0$$

(3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوى (P) .

فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه (Δ) أي: الشعاع $\vec{u}(-2, 1, 0)$

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

$$\text{حيث: } \overline{CM} = t \vec{u}$$

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 11 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x + 2 = -2t \\ y + 2 = t \\ z - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{معناه:}$$

(4) تحديد إحداثيات النقطة D .

بما أن: النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن:

$$\text{إحداثياتها هي } (-2 - 2t, -2 + t, 11)$$

وبما أن: النقطة D تنتمي إلى المستوى (P) .

$$\text{فإن: إحداثياتها تحقق المعادلة: } -2x + y + 18 = 0$$

$$\text{أي: } -2(-2 - 2t) + (-2 + t) + 18 = 0$$

$$\text{معناه: } 5t + 20 = 0 \quad \text{ومنه: } t = -4$$

إذن: إحداثيات النقطة D هي: $(6, -6, 11)$.

(5) دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (AD) ، (BC) .

$$\text{لدينا: } \overline{AD}(0, 0, 5), \overline{BC}(4, -2, 5)$$

ومنه: الشعاعان \overline{AD} ، \overline{BC} غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (AD) ، (BC) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوى.

■ التمثيلان الوسيطان لكل من المستقيمين (AD) ، (BC) هما على

$$\begin{cases} x = -6 + 4k \\ y = -2k \\ z = 6 + 5k \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -6 \\ z = 6 + 5t \end{cases} \quad \text{التوالي:}$$

حيث: k, t عدنان حقيقيان.

$$\text{الجملة: } \begin{cases} -2k = -6 \\ 6 + 5k = 6 + 5t \end{cases} \quad \text{تقبل حلاً واحداً هو: } (t, k) = (3, 3)$$

من أجل: $t = k = 3$ نجد: $(x, y, z) = (6, -6, 21)$

إذن: المستقيمان (AD) ، (BC) متقاطعان في النقطة $E(6, -6, 21)$.

78: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

1: تبين أن: (Δ) ، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوى.

شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{u}(1, 0.5, -2)$

وشعاع توجيه (Δ') هو $\vec{v}(1, -2, 1)$

$$\text{بما أن: } (1)(-2) \neq (0.5)(1)$$

فإن: الشعاعين \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (Δ) ، (Δ') متقاطعان أو لا ينتميان إلى نفس المستوى.

$$\text{الجملة: } \begin{cases} 3 + \lambda = 6 + \alpha \\ 2 + 0.5\lambda = 1 - 2\alpha \end{cases} \quad \text{تقبل حلاً واحداً: } (\lambda, \alpha) = (2, -1)$$

من أجل: $\lambda = 2$ نجد: $(x, y, z) = (5, 3, -6)$

من أجل: $\alpha = -1$ نجد: $(x, y, z) = (5, 3, 4)$

$$\text{بما أن: } (5, 3, 4) \neq (5, 3, -6)$$

فإن: المستقيمين (Δ) ، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوى.

2: أ) تعيين إحداثيات N, M .

بما أن: النقطتين N, M من المستقيمين $(\Delta), (\Delta')$ على الترتيب.

فإن: $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha), M(3+\lambda, 2+0.5\lambda, -2-2\lambda)$

ومنه: $\overline{MN}(\alpha-\lambda+3, -2\alpha-0.5\lambda-1, \alpha+2\lambda+7)$

بما أن: المستقيم (MN) يعامد كل من $(\Delta), (\Delta')$ فإن:

$$\begin{cases} \overline{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overline{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 8\alpha + 21\lambda + 46 = 0 \\ 3\alpha + \lambda + 6 = 0 \end{cases}$$

ومنه: $(\lambda, \alpha) = \left(-\frac{18}{11}, -\frac{16}{11}\right)$

ومنه: نستنتج أن: $N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right), M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$

ب) حساب الطول MN .

لدينا: $\overline{MN}\left(\frac{35}{11}, \frac{30}{11}, \frac{25}{11}\right)$ ومنه: $MN = \frac{5\sqrt{110}}{11}$

3: تعيين معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

نفرض: $\vec{n}(a, b, c)$ شعاع ناظم للمستوي (P) فيكون:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} a + 0.5b - 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

نضع: $b = 6$ ثم نطرح طرفي المعادلتين فنجد: $c = 5$ وبالتالي: $a = 7$.

إذن: الشعاع $\vec{n}(7, 6, 5)$ ناظم للمستوي (P) .

النقطة $A(3, 2, -2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ومنه: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث:

$$\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $7x + 6y + 5z - 23 = 0$

4: حساب المسافة بين نقطة من (Δ') والمستوي (P) .

لدينا: $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha)$ نقطة كيفية من (Δ') .

ومنه: بعد النقطة N عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d = \frac{|7(6+\alpha) + 6(1-2\alpha) + 5(5+\alpha) - 23|}{\sqrt{(7)^2 + (6)^2 + (5)^2}} = \frac{50}{\sqrt{110}} = \frac{5\sqrt{110}}{11}$$

نلاحظ أن: المسافة بين أي نقطة من (Δ') والمستوي (P) هي MN .

حيث: N, M النقطتان المعرفتان في السؤال الثاني.

79: 1: تبين أن المستويين $(P_1), (P_2)$ متعامدان

لدينا: شعاع ناظم للمستوي (P_1) هو: $\vec{u}_1(2, -1, 2)$

شعاع ناظم للمستوي (P_2) هو: $\vec{u}_2(2, 2, -1)$

بما أن: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ فإن: الشعاعين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 متعامدان.

وهذا يعني أن: المستويين $(P_1), (P_2)$ متعامدان

2: حساب بعد النقطة A عن كل من $(P_1), (P_2)$.

نفرض: A_1 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) فيكون:

$$AA_1 = \frac{|2(1) - (2) + 2(-1) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{7}{3}$$

نفرض: A_2 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) فيكون:

$$AA_2 = \frac{|2(1) + 2(2) - (-1) - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

3: أ) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \text{ المستقيم } (\Delta) \text{ معرف بجملته المعادلتين:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{3} + z \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} 3y - 3z + 1 = 0 \\ 6x + 3z - 14 = 0 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا: } f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{58}{9} \text{ ومنه: } AM^2 = \frac{58}{9}$$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AM = \frac{\sqrt{58}}{3}$.

80: 1: تبين أن الرباعي ABCD مربع.

يكون الرباعي ABCD مربعا إذا تعامد و تقايس وتناصف قطراه

(1) القطعتان $[AC]$ ، $[BD]$ لهما نفس المنتصف O

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{AC}(0, -4, 0), \overrightarrow{BD}(-4, 0, 0)$$

(2) ومنه: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ معناه: (AC) ، (BD) متعامدان

(3) لدينا أيضا: $AC = BD = 4$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن: الرباعي ABCD مربع.

2: تحديد معادلة للمستوي (P) دون حساب:

بما أن: النقاط A، B، C، D لها نفس الرقعة $z = 0$.

فإن: معادلة المستوي (P) الذي يشمل A، B، C، D هي: $z = 0$.

3: أ) التحقق أن $\vec{u}(5, 5, 2)$ ناظم للمستوي (ABS).

$$\text{لدينا: } \vec{u}(5, 5, 2), \overrightarrow{AB}(2, -2, 0), \overrightarrow{AS}(0, -2, 5)$$

$$\text{ومنه: } \overrightarrow{AS} \cdot \vec{u} = 0 \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$$

معناه: الشعاع \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AS} ، \overrightarrow{AB} .

إذن: الشعاع \vec{u} ناظم للمستوي (ABS).

ب) كتابة معادلة للمستوي (ABS).

المستوي (ABS) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$$\text{أي: } 5(x) + 5(y - 2) + 2(z) = 0 \text{ معناه: } 5x + 5y + 2z - 10 = 0$$

إذن: معادلة المستوي (ABS) هي: $5x + 5y + 2z - 10 = 0$

$$\text{نضع } z = t \text{ فنجد: } \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases} \text{ وهي المعادلات الوسيطة للمستقيم } (\Delta).$$

ب) حساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

نفرض: H المسقط العمودي للنقطة A_1 على المستقيم (Δ) فيكون:

الرباعي AA_1HA_2 مستطيل ومنه: $(AH)^2 = (AA_1)^2 + (A_1H)^2$

$$\text{أي: } (AH)^2 = (AA_1)^2 + (AA_2)^2$$

$$\text{معناه: } (AH)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + (1)^2 = \frac{58}{9} \text{ ومنه: } AH = \frac{\sqrt{58}}{3}$$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $\frac{\sqrt{58}}{3}$.

4: تعيين إحداثيات النقطة M.

بما أن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن إحداثياتها هي:

$$\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{3} + t, t\right)$$

$$\text{ومنه: } AM^2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}t\right)^2 + \left(-\frac{7}{3} + t\right)^2 + (t+1)^2$$

$$\text{معناه: } AM^2 = \frac{9}{4}t^2 - 4t + \frac{74}{9}$$

$$\text{نضع: } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 4t + \frac{74}{9} \text{ فيكون: } f'(t) = \frac{9}{2}t - 4$$

$$\text{المعادلة: } f'(t) = 0 \text{ تكافئ: } \frac{9}{2}t - 4 = 0 \text{ ومنه: } t = \frac{8}{9}$$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة f قيمة حدية

صغرى أي: عندما تكون $t = \frac{8}{9}$.

إذن: إحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{17}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

4: التحقق أن معادلة (BCS) هي: $5x - 5y + 2z - 10 = 0$

بما أن: إحداثيات النقاط B، C، S تحقق المعادلة: $5x - 5y + 2z - 10 = 0$

فإن: معادلة المستوي (BCS) هي: $5x - 5y + 2z - 10 = 0$

5: أ) كتابة معادلة للمستوي (P').

الشعاع $\vec{v}(5, -5, 2)$ ناظم لكل من (BCS) و (P') لأنهما متوازيان.

ومنه: المستوي (P') هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$\overrightarrow{EM} \cdot \vec{v} = 0 \text{ أي: } 5(x) - 5(y - 1) + 2(z) = 0$$

$$\text{معناه: } 5x - 5y + 2z + 5 = 0$$

إذن: معادلة للمستوي (P') هي: $5x - 5y + 2z + 5 = 0$

ب) تحديد نقاط تقاطع (P') مع كل من: (OK)، (OJ)، (OI).

■ من أجل: $z = y = 0$ نجد:

$$x = -1 \text{ أي: } 5x - 5(0) + 2(0) + 5 = 0$$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OI) هي: $(-1, 0, 0)$

■ من أجل: $x = z = 0$ نجد:

$$y = 1 \text{ أي: } 5(0) - 5y - 2(0) + 5 = 0$$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OJ) هي: $(0, 1, 0)$

■ من أجل: $x = y = 0$ نجد:

$$z = -2.5 \text{ أي: } 5(0) - 5(0) + 2z + 5 = 0$$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OK) هي: $(0, 0, -2.5)$

81: 1) إثبات أن المجموعة (S_m) سطح كرة.

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2my - 4mz - 1 = 0$$

$$\text{ومنه: } d = -1, \quad c = -4m, \quad b = 2m, \quad a = -2m$$

$$\text{لدينا: } \Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 4d \quad \text{ومنه: } \Delta = 24m^2 + 4 > 0$$

إذن: المجموعة (S_m) سطح كرة مركزها هو: $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

$$\text{أي: } \omega(m, -m, 2m) \text{ ونصف قطرها: } R = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{6m^2 + 1}$$

2) تبين أن مجموعة النقط ω هي مستقيم:

$$\begin{cases} x = m \\ y = -m \\ z = 2m \end{cases}$$

بما أن: العدد m حقيقي فإن: مجموعة النقط ω هي مستقيم مركبات

$$\text{شعاع توجيهه } (1, -1, 2)$$

3) إثبات أن (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C).

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2my - 4mz - 1 = 0$$

$$\text{ومنه: } x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2m(x - y + 2z) = 0$$

تتحقق هذه المعادلة من أجل جميع قيم m الحقيقية إذا كان:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (1) \\ x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) هي معادلة سطح الكرة (S_0) التي مركزها O وطول نصف

قطرها r حيث: $r = 1$ والمعادلة (2) هي معادلة مستوي (P).

بما أن: المركز O ينتمي إلى المستوي (P) فإن:

المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S_0) في دائرة (C) مركزها O

وطول نصف قطرها $r = 1$ لأن: بعد مركز سطح الكرة (S_0) عن

المستوي (P) أصغر تماماً من طول نصف قطرها.

(4) تحديد قيمة العدد m .يكون المستوي (P) مماساً لسطح الكرة (S_m) إذا كان:بعد المركز ω عن المستوي (P) يساوي $R = \sqrt{6m^2 + 1}$

$$\text{أي: } \frac{|m - (-m) - (2m) + \sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \sqrt{6m^2 + 1} \quad \text{معناه: } 1 = \sqrt{6m^2 + 1}$$

بتربيع الطرفين نجد: $1 = 6m^2 + 1$ ومنه: $m = 0$ إذن: قيمة m حيث يكون (P) مماساً لسطح الكرة (S_m) هي 0.

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

1: أ) تبين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .بما أن: إحداثيات النقاط A, B, C تحقق المعادلة: $x - z + 1 = 0$ فإن: المستوي (P) هو المستوي (ABC) .ب) تحديد طبيعة المثلث ABC .لدينا: $AB^2 = 6$ ، $AC^2 = 3$ ، $BC^2 = 9$ بما أن: $BC^2 = 9 = AC^2 + AB^2$ فإن: المثلث ABC قائم في A .2: أ) التحقق أن النقطة $D(2, 3, 4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .لدينا: $2 - 4 + 1 = -1 \neq 0$ ومنه: النقطة D لا تنتمي إلى (ABC) .ب) تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$.بما أن: النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .فإن: الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.3: أ) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .نفرض d المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) فيكون:

$$d = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب) حساب حجم الرباعي $ABCD$.

$$\text{نعلم أن: } V = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times d$$

$$\text{ومنه: } V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{نجد: } V = \frac{1}{2} uv$$

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة التمثيل الوسيطى للمستقيم (AB) .تتبع نقطة $M(x, y, z)$ إلى المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{AB}(-2, 1, -3) \quad , \quad \overrightarrow{AM}(x-2, y-1, z-2)$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases}$$

إثبات أن (D) ، (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.لدينا: $\vec{u}(3, -1, 2)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2, 1, -3)$ حيث: \vec{u} موجه (D) .بما أن: $(-2)(-1) \neq (1)(3)$ فإن: الشعاعين \vec{u} ، \overrightarrow{AB} غير مرتبطين خطياً.ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متوازيين.

$$\begin{cases} 2 + 3t = 2 - 2\alpha \\ 1 - t = 1 + \alpha \\ 2t = 2 - 3\alpha \end{cases} \quad \text{الجملة: لا تقبل حلاً.}$$

ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متقاطعين.إذن: المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي2: أ) تبين أن الشعاع $\vec{n}(1, 5, 1)$ عمودي على المستوي (P) .

$$\text{لدينا: } \vec{n} \cdot \vec{u} = (1)(3) + (5)(-1) + (1)(2) = 0$$

ومنه: \vec{n} ، \vec{u} متعامدان إذن: الشعاع \vec{n} ناظم للمستوي (P) .

ب) كتابة معادلة للمستوي (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

ومنه معادلة المستوي (P) هي: $x + 5y + z - 9 = 0$.

ج) تبين أن بعد نقطة M من (D) و (P) مستقلة عن موضع M.

لتكن: H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P).

$$\text{ومنه: } HM = \frac{|2 + 3t + 5(1-t) + 2t - 9|}{\sqrt{1+25+1}} = \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

د) تعيين التمثيل الوسيطى لمستقيم تقاطع المستويين (P)، (yoz).

معادلة المستوي (yoz) هي: $x = 0$ ومنه: مستقيم التقاطع معرف

بجملته المعادلتين:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 9 - 5t \end{cases} \text{ أي: مع } t \text{ عدد حقيقي.}$$

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة معادلة للمستوي (P_2) .

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} \text{ لدينا: ومنه: } \begin{cases} x - 2y = -1 + \beta \\ y - z = -4 - \beta \end{cases}$$

ومنه: $(x - 2y) + (y - z) = -5$ نجد: $x - y - z + 5 = 0$.

إن: معادلة للمستوي (P_2) هي: $x - y - z + 5 = 0$.

2: تعيين شعاع ناظم لكل من المستويين (P_1) ، (P_2) .

من المعادلتين الديكارتيين للمستويين (P_1) ، (P_2) نستنتج أن:

الشعاع $\vec{n}_1(1, 2, -1)$ ناظم للمستوي (P_1)

والشعاع $\vec{n}_2(1, -1, -1)$ ناظم للمستوي (P_2) .

3: تبين أن المستويين (P_1) ، (P_2) متعامدان.

لدينا: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ومنه: (P_1) ، (P_2) متعامدان.

4: أ) حساب قيمة كل من d_1 ، d_2 .

$$d_1 = \frac{|3 + 2(1) - 1 - 2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d_2 = \frac{|3 - 1 - 1 + 5|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

ب) استنتاج المسافة d_3 .

$$\text{لدينا: } d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 \text{ ومنه: } d_3^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 = \frac{38}{3}$$

$$\text{ومنه: } d_3 = \sqrt{\frac{38}{3}} = \frac{\sqrt{114}}{3}$$

5: أ) تعيين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا: } \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases} \text{ نضع: } z = \lambda \text{ فنجد:}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{14}{3} + \lambda + 2 \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x + 2y - \lambda - 2 = 0 \\ x - y - \lambda + 5 = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

إن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = \frac{-8}{3} + \lambda \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \text{ حيث: } \lambda \in \mathbb{R}$$

2: برهان أن المجموعة (S) سطح كرة.

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

$$\text{ومنه: } \Delta = (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 - 4(-6) = 36 > 0$$

$$\text{ومنه: (S) سطح كرة مركزها } \Omega(1, 1, 1) \text{ ونصف قطرها } \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

3: أ) تعيين إحداثيات النقطة G.

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ ومنه: } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

ومنه: إحداثيات النقطة G هي: (1, 1, -2).

واضح أن: إحداثيات النقطة G تحقق معادلة (S)

ومنه: النقطة G تنتمي إلى (S).

ب) كتابة معادلة للمستوي (Q).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (Q) إذا كان: $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{G\Omega} = 0$

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{GM}(x-1, y-1, z+2), \quad \overrightarrow{G\Omega}(0, 0, 3)$$

ومنه: معادلة المستوي (Q) هي: $3(z+2) = 0$ أي: $z = -2$.

86: نكالوربا الجزائر دورة جوال 2008 شعبة العلوم التجريبية.

تعيين الأجوبة الصحيحة

1) بما أن: إحداثيات النقطة D لا تحقق المعادلة: $x - 3z - 4 = 0$

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: المستوي (P) هو (ABC)

2) بما أن: \vec{n}_2 مرتبط خطياً مع $\vec{u}(1, 0, -3)$ ناظم المستوي (P)

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: $\vec{n}_2(-2, 0, 6)$ ناظم للمستوي (P)

3) بعد النقطة D عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d = \frac{|3 - 3(1) - 4|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

إن: الإجابة الصحيحة هي الإجابة (ج).

ب) حساب AM^2 بدلالة λ .

$$\text{لدينا: } AM^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$\text{ومنه: } AM^2 = \left(-\frac{8}{3} + \lambda - 3\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + (\lambda - 1)^2$$

$$\text{بعد النشر والاختزال نجد: } AM^2 = \frac{2}{9}(9\lambda^2 - 60\lambda + 157)$$

$$\text{نضع: } f(\lambda) = \frac{2}{9}(9\lambda^2 - 60\lambda + 157)$$

$$\text{الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ حيث: } f'(\lambda) = \frac{2}{9}(18\lambda - 60)$$

$$\text{المعادلة: } f'(\lambda) = 0 \text{ تكافئ: } \frac{2}{9}(18\lambda - 60) = 0$$

$$\text{ومنه: } \lambda = \frac{10}{3} \text{ وبالتالي: } AM^2 = f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{38}{3}$$

$$\text{إذن: } AM = \sqrt{\frac{38}{3}} = d_3$$

25) 1: تبين أن مجموعة النقط M هي مستوي.

$$\text{لدينا: } AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$$

$$\text{ومنه: } AM^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 6$$

$$\text{لدينا أيضاً: } BM^2 = (x+1)^2 + (y)^2 + (z+2)^2$$

$$\text{ومنه: } BM^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4z + 5$$

$$\text{نعوض عن } AM^2 \text{ و } BM^2 \text{ في المعادلة: } AM^2 - BM^2 = 1$$

$$\text{فنجد: } 2x + y + 4z = 0$$

وهي معادلة مستوي (P) شعاع ناظم له $\vec{n}(2, 1, 4)$

لدينا: $\vec{n} = -\vec{AB}$ ومنه: الشعاعان \vec{AB} ، \vec{n} مرتبطان خطياً.

وهذا يعني أن: المستوي (P) يعامد المستقيم (AB).

تحديد الاقتراحات الصحيحة.

1: لدينا: $z = 1 + t$ ومنه: $2 = 1 + t$ معناه: $t = 1$ من أجل $t = 1$ نجد: $x = y = 1$.ومنه: $A(1, 1, 2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .بالمثل نبين أن C, B لا تنتميان إلى المستقيم (Δ) .

إن: الاقتراح الصحيح هو (أ).

2: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو: $\vec{v}(2, -1, 1)$ بما أن: $\vec{v} = -2\vec{u}$ فإن: الشعاع \vec{u} موجه للمستقيم (Δ) .

إن: الاقتراح الصحيح هو (ب).

3: لدينا: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ حيث: \vec{v} ناظم المستوي (P) و \vec{u} موجه (Δ) .ومنه: \vec{v}, \vec{u} متعامدان.المعادلة: $(t+1)+1+3(-t+2)+(2t-1)=0$ لا تقبل أي حل.ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P) .

إن: الاقتراح الصحيح هو (ج).

4: شعاع ناظم المستوي (Q_3) هو: $\vec{n}(1, -1, 2)$ لدينا: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ ومنه: المستوي (Q_3) يعامد (P) .

إن: الاقتراح الصحيح هو (ج).

5: باستعمال المسافة بين نقطة ومستو نجد كل الاقتراحات صحيحة.

بما أن: $(-1)(-3) \neq (-5)(1)$ فإن: النقاط A, B, C ليست في استقامة.

إن: الجملة (1) خاطئة.

(2) إحداثيات النقاط A, B, D تحقق المعادلة: $25x - 6y - z - 33 = 0$.

إن: الجملة (2) صحيحة.

(3) لدينا: $\overline{CD}(-2, -1, 0)$ ، $\vec{n}(2, -1, 2)$ حيث: \vec{n} شعاع ناظم للمستوي (π) .بما أن: $(-2)(-1) \neq (-1)(2)$ فإن: الشعاعين \overline{CD} ، \vec{n} غير مرتبطين خطيا.

إن: الجملة (3) خاطئة.

(4) لدينا: $\overline{BH}(0, 3, -5)$ ، $\vec{n}(2, -1, 2)$ بما أن: $(0)(-1) \neq (-5)(2)$ فإن: الشعاعين \overline{BH} ، \vec{n} غير مرتبطين خطيا.

إن: الجملة (4) خاطئة.

89: تحديد الأجوبة الصحيحة والأجوبة الخاطئة:

(1) النقاط: D, C, B على استقامة واحدة.لدينا: $\overline{BC}(3, -3, 0)$ ، $\overline{BD}(1, -4, 1)$ بما أن: $(1)(-3) \neq (-4)(3)$ فإن: \overline{BC} ، \overline{BD} غير مرتبطين خطيا.

إن: الجملة (1) خاطئة.

(2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x + 2y - z - 11 = 0$ إحداثيات النقاط A, B, C تحقق المعادلة: $2x + 2y - z - 11 = 0$

محتويات الكتاب

الدرس	الموضوع	الصفحة
01	الجدار السلمي في المستوي	05
02	تطبيقات الجداء السلمي في المستوي	06
03	الجداء السلمي في الفضاء	09
04	المعادلة الديكارتية لمستو	12
05	معادلة سطح كرة	13
06	المرجح	14
07	مجموعات النقط في الفضاء	17
08	المستقيمات في الفضاء	19
09	الأوضاع النسبية	20
	تمارين ومسائل محلولة	24
	حلول التمارين والمسائل	52

(2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x + 2y - z - 11 = 0$

إحداثيات النقاط A، B، C تحقق المعادلة: $2x + 2y - z - 11 = 0$ ومنه: الجملة (2) صحيحة.

(3) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

لدينا: شعاع ناظم المستوي (ABC) هو: $\vec{u}(2, 2, -1)$

بما أن: $\vec{DE}(2, 2, 1)$ ، $\vec{u}(2, 2, -1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(2)(1) \neq (-1)(2)$

فإن: الجملة (3) خاطئة.

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (4) \text{ التمثيل الوسيطى للمستقيم (CD) هو:}$$

بما أن: إحداثيات النقطة C لا تحقق معادلات الجملة السابقة

فإن: الجملة (4) خاطئة.

(5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

إحداثيات النقطة E لا تحقق معادلات المستقيم (CD)

ومنه: الجملة (5) خاطئة.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير
و النجاح و المغفرة